

Roberval

Sur la composition des Mouvements etc.

De recognitione æquationum.

Traité des Indivisibles

De Trochoide



TR1-

D I V E R S
O U V R A G E S

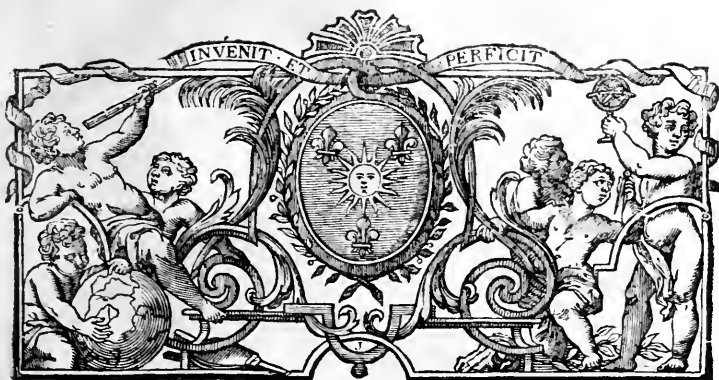
D E

M. PERSONIER DE ROBERVAL.

167
1720

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/diversouvrages00robe>



OBSERVATIONS
SUR LA COMPOSITION
DES MOUVEMENTS,
ET SUR LE MOYEN DE TROUVER
LES TOUCHANTES
DES LIGNES COURBES.

Pour ne perdre aucune des pensées que nous croirons pouvoir servir à l'intelligence de ce sujet, nous ne nous attacherons à aucun ordre ou suite de propositions déterminées, il faudra même le plus souvent ou supposer l'intelligence de quelques définitions & principes que nous n'aurons pas expliqués, ou bien les insérer avec nos propositions.

Définitions

NOUS appellons ligne simple celle qui étant sur un plan, est telle que chacune de ses parties peut convenir avec toutes les autres parties de la même ligne. Telle est la ligne droite & la circonférence du cercle.

Ligne composée est celle dont les parties n'ont point cette propriété de s'ajuster & convenir avec chacune des autres parties.

Mouvement uniforme est celui par lequel un mobile est porté d'une vitesse toujours égale à elle-même.

Mouvement irrégulier ou difforme, au contraire.

Puissance est une force mouvante.

Impression est l'action de cette puissance.

La ligne de direction de l'impression est celle par laquelle la puissance meut le mobile.

Nous appellons les impressions semblables, ou diverses, suivant que leurs lignes de direction sont entre-elles parallèles, ou ne le sont pas, &c.

Or il ne faut pas croire que nous appellions une ligne, ligne simple, d'autant qu'elle est décrite par un mouvement simple : car, comme nous verrons dans la suite, non-seulement la circonférence du cercle, mais encore la ligne droite peut être entendue avoir été décrite par un mouvement composé de tant de mouvemens qu'on voudra.

Nous avons encore défini la puissance en tant qu'elle nous peut servir considérant les diversités des mouvemens, ce qui n'empêche pas que dans d'autres spéculations, nous n'entendions par le mot de puissance une force capable de soutenir un poids, ou de quelque autre effet.

Généralement en ce Traité nous considérerons deux choses dans les mouvemens, leur direction, & leur vitesse.

Axiomes.

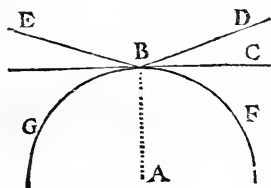
LA direction d'une puissance mouvant un mobile, lequel par son mouvement décrit une circonférence de cercle, est la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamètre, au bout duquel le mobile se trouve.

Soit le mobile B, (qui par son mouvement décrit la circonférence G B F) au point B, à l'extrémité du demi-diamètre A B, auquel soit perpendiculaire la ligne B C.

Je pose pour fondement que B C est la ligne de direction par laquelle se meut le mobile B en ce point-là. Et on en peut rendre une raison naturelle, qui est que l'on ne sçauroit prendre quelque autre ligne que ce puisse être, comme B D, sans tomber dans une absurdité: car puisque la nature ne souffre rien d'indéterminé, & qu'on ne sauroit prendre la ligne B D, qui fait l'angle oblique DBA, avec le demi-diamètre, que par la même raison l'on ne fût aussi obligé de prendre de l'autre part la ligne B E qui fait l'angle E B A, égal à D B A, (ce qui est absurde) il s'ensuit que la seule ligne qui puisse être prise pour la direction d'un tel mouvement sera la perpendiculaire B C, qui est la seule qui fasse angles droits avec le même demi-diamètre A B.

D'où il s'ensuit que cette direction change à chaque point de la circonférence.

D'où il s'ensuit encore que si un mobile porté de G. vers B venoit à se détacher de la circonférence du cercle, comme si le demi-diamètre l'ayant porté de G en B, le lâchoit au point B, le mobile seroit porté avec



Ce raisonnement ne peut quadrer qu'à la circonférence d'un cercle.

4 DES MOUVEMENTS COMPOSÉS.

cette impression par la ligne BC.

Et d'autant qu'il se rencontre que cette même ligne BC est la touchante du cercle au point B, nous prendrons pour principe d'invention qu'en toutes les autres lignes courbes, quelles qu'elles puissent être, leur touchante, en quelque point que ce soit, est la ligne de direction du mouvement qu'a en ce même point le mobile qui les décrit. En sorte que composant des mouvemens en diverses façons, & venant à connoître la direction du mouvement composé en quelque point que ce soit, d'une ligne courbe, nous connoîtrons par même moyen sa touchante.

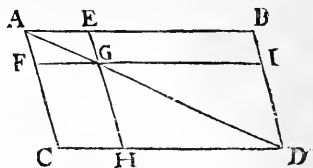
Or nous entendons qu'un mouvement est composé de plusieurs mouvemens, lors que le mobile duquel il est. le mouvement, est meû par diverses impressions.

THEOREME I.

Proposition première.

SI un mobile est porté par deux divers mouvemens chacun droit & uniforme, le mouvement composé de ces deux sera un mouvement droit & uniforme différent de chacun d'eux, mais toutefois en même plan, en sorte que la ligne droite que d'écrira le mobile sera le diamètre d'un parallélogramme, les côtés duquel seront entre-eux comme les vitesses de ces deux mouvemens; & la vitesse du composé sera à chacun des composans comme le diamètre à chacun des côtés.

Soit le mobile A porté par deux divers mouvemens desquels les lignes de direction soient AB, AC, faisant l'angle BAC, & que les mouvemens droits & uniformes soient tel



R. S.

qu'en même temps que l'impression AB auroit porté le mobile en B, en même temps l'impression AC l'eût porté en C. Je dis que le mobile porté par le mouvement composé de ces deux, sera porté le long du diamètre AD du parallélogramme AD, duquel les deux lignes AB, AC, sont les deux côtés, & que le mouvement qu'il aura sur le diamètre AD sera uniforme.

Ce que nous comprendrons, si nous nous imaginons que la ligne AB descendant toujours uniformément & parallèlement à la ligne CD, jusqu'à ce qu'elle ne soit qu'une même ligne avec la ligne CD; & la ligne AC se mouvant vers la ligne BD en la même façon, notre mobile A ne fait autre chose que se rencontrer à tout moment en la commune section de ces deux lignes.

Or il est assez clair que les points de cette commune section sont tous dans le diamètre AD; ce que nous démontrerons encore mieux par cette considération. Imaginons-nous que le mobile A se mouvant uniformément sur l'une des lignes AB ou AC, la même ligne se meut toujours parallèlement à soi-même. En cette sorte si le mobile est meû sur AB de A en B en même temps que AB descend jusques en CD; & posons le cas qu'en un certain temps le mobile soit arrivé en E, & qu'en ce même temps le côté AB soit descendu en sorte qu'il fasse une même ligne avec FI, dans laquelle prenons FG égale à AE (par notre supposition elle lui est aussi parallèle) donc le mobile A sera en G: je dis que le point G est dans le diamètre AD du parallélogramme ABCD. Car par le point G soit tiré la ligne EGH qui achevera le petit parallélogramme AG. Puis donc que les deux mouvemens que nous considérons sont uniformes, comme AB est à AE, ainsi AC est à AF; & en changeant, AE est à AF comme AB à AC, & l'angle BAC est commun; partant les deux parallélogrammes AD &

A G sont semblables & à l'entour d'un même diamètre; & par conséquent le point G est dans le diamètre A D, ce qu'il falloit démontrer. Le reste de notre proposition n'est qu'un corollaire de ce que nous avons dit: c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas plus long-temps.

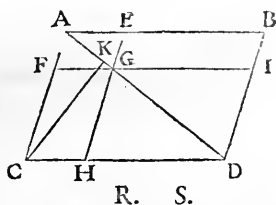
Mais nous remarquerons qu'en cette première composition de mouvemens & généralement en toutes les autres, nous pouvons considérer six choses. Sçavoir trois directions qui sont les deux simples, & la composée, & trois impressions qui sont les deux simples & la composée.

Or si les trois directions nous sont données, les trois impressions sont aussi données, c'est à dire les proportions de vitesses des trois mouvemens; car A B, A C & A D, étant données, nous n'aurons qu'à prendre un point D dans A D, ligne de direction du mouvement composé, & par le point D tirer D B & D C parallèle à A B & A C; & le parallelogramme étant ainsi achevé les proportions des mouvemens seront les mêmes que celles des deux côtés & du diamètre du parallelogramme.

Mais les trois impressions étant connues, ou la proportion des trois lignes A B, A C, A D, nous ne connoissons aucune des directions, puis que pas une de ces lignes ne nous sera donnée de position, quoi - que les angles qu'elles feront à leur rencontre nous soient donnés en espece. Or en ce cas il faut que deux des puissances quelles qu'elles soient, soient ensemble plus grandes que la troisième, puis, que les lignes A B, A C, A D, qui sont en même raison que les puissances, peuvent être les côtés d'un triangle.

Que si l'on nous donne deux directions, l'une de l'un des mouvemens composans, & l'autre du composé, nous ne connoissons rien de la troisième, ni de la force des impressions, mais seulement nous aurons une raison

donnée telle que la raison de l'impression ou de la puissance composante qui nous est donnée à l'autre puissance composante ne pourra pas être plus grande car AC & AD nous : étant données, aiant pris dans AC un point comme C , & de C aiant abaissé CK perpendiculaire sur AD , la raison de AC



à AB ne pourra pas être plus grande que la raison de la ligne AC à cette perpendiculaire CK , puisque cette perpendiculaire est la moindre de toutes les lignes qui veut être le troisième côté d'un triangle, l'un des deux autres étant AC , & le second une portion de la ligne AD .

Que si l'on nous eut donné deux mouvemens entiers, c'est-à-dire leurs directions & leurs vitesses, l'on nous eut aussi donné la direction & la vitesse du troisième; car aiant deux côtés d'un triangle & l'angle qu'ils contiennent, tout le reste nous est donné.

Pareillement nous étant donné deux directions telles qu'on voudra de deux mouvemens, & la raison de la vitesse du troisième à la vitesse de l'un des deux desquels nous avons la direction, nous connoissons les trois mouvemens, comme si l'on nous donne les directions AB , AC , des deux composans, & la raison de la vitesse du composé à AB comme de R à S , prenant dans la direction AB un point comme B , & faisant que comme S est à R , ainsi AB soit à un autre, nous trouverons la ligne AD . Donc si du centre A & de l'intervalle AD nous décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne BI D parallèle à AFC en D , nous aurons les vitesses des trois mouvemens AB , AD , BD ou AC , &c. Les choses

étant ainsi expliquées, nous énoncerons notre proposition plus généralement en cette sorte.

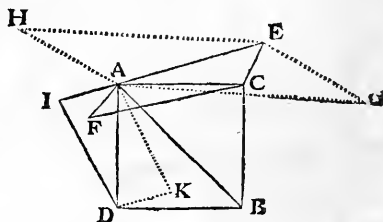
Proposition seconde.

UN mouvement composé de tant de mouvemens droits & uniformes qu'on voudra se fera par une ligne droite, & sera uniforme.

Ce qui est encore assez clair par ce que nous venons de dire; car prenant deux de ces mouvemens j'en composerai un seul, puis que par la précédente ces deux se doivent réduire en un, puis de ce composé considéré comme simple (car il n'importe, puis que les deux directions qui le composent ne font pas plus qu'une simple que nous pouvons concevoir) & d'un autre, j'en composerai un second, qui par ce moyen sera composé de trois; & ainsi en continuant je viendrai à en composer un seul de tant qu'il me plaira d'où il résulte.

Que tout mouvement uniforme & droit peut être entendu, ou comme simple, ou comme composé de tant d'autres mouvemens qu'on voudra.

Où il faut remarquer que nous pouvons concevoir ce mouvement comme composé de divers autres, lesquels se feront en des plans différens, en sorte pourtant que le



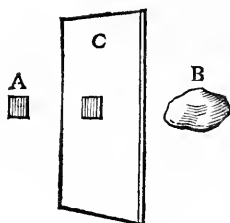
plus composé de tous soit dans le plan des deux que nous considérons comme les derniers qui le composent. Ainsi le mouvement AB peut être composé des deux AC & AD, dont l'un AC est composé de deux autres AE, AF, l'un

l'un desquels comme AE sera composé de deux autres AG & AH, & ainsi de tant qu'on voudra; & le second des deux AD, que nous avons dit qui composoient le mouvement AB, peut être entendu comme composé de deux autres AI, AK, & encore chacun de ceux-là de deux autres, &c. en sorte que le mouvement AB sera composé de tant que l'on voudra, & même desquels les impressions seront données: car qui m'empêchera de décrire des parallélogrammes si différens qu'il me plaira, desquels les diagonales soient AB, AD, AC, AE, AH, AG, &c.

Et c'est ici un champ d'une infinité de belles spéculations, comme si aiant supposé que le mouvement AB est composé de cinq autres mouvemens, la vitesse de chacun desquels nous est donnée, l'on nous demande combien il est nécessaire de connoître de leurs directions pour déterminer chacun d'eux & les donner de position, & ainsi d'une infinité d'autres qui pourroient être telles que la recherche excédant la capacité de notre esprit, nous n'en pourrions pas donner les solutions.

Mais pour tirer de cette proposition des connoissances encores plus belles, nous allons expliquer par son moïen la nature des réflexions & de la réfraction, aiant premièrement posé pour principe, qu'un mouvement pour composé qu'il soit de diverses impressions, aura le même effet qu'un autre causé par une seule impression, de laquelle la direction soit la même que de la composée, si l'un est aussi fort que l'autre.

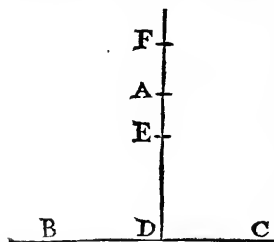
Ceci étant posé, nous considérons dans les corps deux sortes d'impressions qui les peuvent faire mouvoir; l'une qui les chasse d'un lieu vers un autre par violence: telle est celle que la raquette donne à la bale, la corde d'un arc à la flèche, &c. L'autre qui se fait par attraction des corps soit que cette attraction soit réciproque, ou non; & cette dernière est de telle nature qu'elle ne peut jamais causer



de réflexion, comme si l'aimant B attirant le fer A, le fer s'approchant vient à rencontrer le corps C qui l'empêche de continuer son mouvement de A vers B, il s'arrêtera contre le corps C, le pressant continuellement, d'autant que l'attraction se faisant au travers de C, la vertu de l'aimant empêche le fer de rejaillir vers A; mais

la nature de la première sorte d'impression est telle qu'un corps étant meû en cette façon, s'il vient à rencontrer un obstacle auquel il ne puisse pas communiquer son impression, l'obstacle la lui rend, ou pour mieux dire le détermine à retourner vers une autre part; & nous prendrons pour principe, que si un mobile rencontre un obstacle étant meû par une ligne perpendiculaire au même obstacle, il retournera vers le lieu duquel il étoit meû. Ainsi A. se

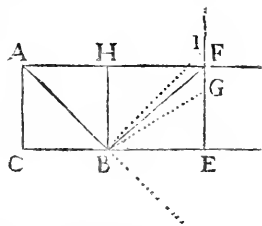
mouvant vers D. par une ligne perpendiculaire à l'obstacle BC, & venant à rencontrer cet obstacle, auquel nous supposons qu'il ne puisse pas communiquer toute ou presque toute l'impression qui l'a fait mouvoir, il fera réfléchi par la même ligne DA, par laquelle il s'étoit meû mais en telle sorte que s'il n'a communiqué rien du tout de son impression à BC, & que BC ne lui en ait pas donné une nouvelle, il retournera avec autant de vitesse qu'il en avoit en D; que s'il a communiqué une partie de son impression à BC il ne retournera pas avec autant de vitesse qu'il en avoit en D. & enfin si l'ob-



stacle BC ne lui a pas seulement rendu l'impression qu'il lui vouloit donner, mais encore l'a augmentée, comme si en D il a trouvé un ressort, ou autre chose, alors le mobile retournera de D avec plus de vitesse qu'il n'en avoit, quand il est premièrement parvenu au même point D.

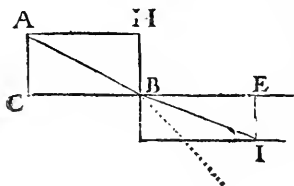
Ce principe étant ainsi expliqué, nous n'aurons point de peine à entendre la nature de la réflexion. Car si nous pensons qu'une balle étant poussée d'A vers B, rencontre au point B la superficie de la terre que nous supposons parfaitement plate & dure, pour ne nous point embarrasser dans de nouvelles difficultez, laquelle l'empêchant de passer outre est cause qu'elle se détourne, & pour entendre de quel côté, puisque son mouvement peut être divisé en toutes les parties desquelles l'on peut concevoir qu'il est composé, imaginons-nous qu'il le soit des deux AC & AH, ou CB, desquels le premier fait descendre la balle de A en C, & le second la porte de la gauche AC, vers la droite; & parce que la

rencontre de la terre est tout-à-fait contraire à l'un de ces mouvemens AC, & qu'elle n'est point opposée à celui qui l'a fait aller de la gauche vers la droite, il est certain que si le mobile eût été meû seulement par son propre poids sur un plan incliné, comme AB, étant arrivé en B, ou il se fût arrêté tout court, ou suivant sa figure & les degrez d'impression qu'il auroit, il eût roulé le long de BE, mais parce que le mouvement de la balle est un mouvement violent, & que par notre principe si elle eût été portée le long de HB, elle seroit remontée de B, en H: au lieu que nous avons composé le mouvement AB des deux CB & HB, puis que le mouvement HB est changé en BH,



composons un mouvement de deux, dont l'un soit CB ou BE que nous prenons égal à CB & l'autre EF & aiant décrit le parallelogramme HE, tirons la diagonale du point B, où se fait la réflexion en montant vers F, nous trouverons que la balle remontera en autant de temps par la ligne BF, qu'elle en aura mis à descendre par la ligne AB; en sorte que l'angle de réflexion sera égal à celui d'incidence, car supposant que la balle n'ait rien perdu de son impression, & n'en ait point acquis de nouvelle, son mouvement n'a fait que changer de direction: mais si elle eût rencontré un corps qui lui eût cédé, en sorte que lui communiquant de son impression elle en eût tout autant perdu, il eût fallu composer un mouvement de BE, & d'un autre moindre que EF, comme EG; auquel cas l'angle de réflexion auroit été moindre que celui d'incidence. Et posé que la balle eût rencontré un corps capable d'augmenter son impression, comme une raquette, ou un ressort, son mouvement auroit été composé de BE, & d'un autre comme EI plus grand qu'EF en montant, auquel cas l'angle de réflexion auroit été plus grand que celui d'incidence.

Et ce même raisonnement se peut aussi-bien accommoder à l'opinion de ceux qui tiennent que la balle ou tout autre missile aiant communiqué toute son impression à l'obstacle, elle réjaillit ou par la force du ressort qu'elle rencontre dans l'obstacle ou par celle du ressort qui est en elle-même, ou par toutes les deux.



Venons à la réfraction, & supposons que la balle rencontre en B, non plus la superficie de la terre, mais une toile si déliée qu'elle ait la force de la rompre en perdant seule-

ment une partie de son impression; & parce qu'elle ne doit rien perdre de celle qui la fait aller de la gauche vers la droite, d'autant que la toile ne lui est point opposée en ce sens là, supposons qu'elle perd la moitié de l'impression qui la fait descendre, en ce cas il faudra continuer BE égale à CB , & prendre EI égale à la moitié de AC , de sorte que la diagonale BI fera le chemin que suivra le mobile après sa réfraction; & pareillement si la vitesse AC eût été augmentée, par exemple, de la moitié, comme si le mobile passant de l'air eût entré dans un autre milieu de telle nature qu'il eût pû s'y mouvoir une fois aussi vite, en ce cas nous aurions fait EI double de AC , BE demeurant égale à BC , &c. ce que l'on voit expliqué bien au long dans les Auteurs.

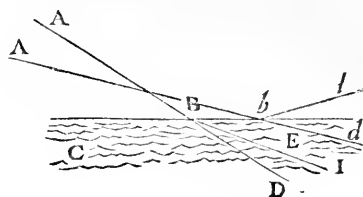
Or il faut remarquer avec soin cette façon de composer, & mêler les mouvemens, puis que nous voyons que des personnes le plus exercées dans la recherche des vérités Mathématiques se sont trompées en cet endroit: ainsi *M. Des Cartes* pour expliquer la réflexion, décrit un cercle du centre B , qui passe par A , & trouve que le point de la circonférence auquel le mobile retournera en autant de tems qu'il a mis à aller de A vers B doit être F ; au lieu que d'un raisonnement semblable au nôtre il devoit en tirer comme une conséquence, que le point F dans cette hypothèse se rencontrera dans la circonférence du cercle décrit du centre B par A .

Secondement, expliquant la réfraction de la bale dans l'eau, il a confondu les termes d'impression ou vitesse, & de détermination, lesquels pourtant il avoit distingués peu auparavant; car en la page 17. ligne dernière, il dit & puis qu'elle ne perd rien du tout de la détermination, &c.

Disc. 2. de la Dioptr.

Troisièmement, il semble qu'il explique mal dans la page 19. la réflexion de la bale sur la superficie de l'eau: car il est vraisemblable que lors que la bale

AB entre dans l'eau, & que la réfraction se fait vers I,



c'est à cause que la bale entrant dans l'eau au point B, & voulant continuer son chemin vers D, rencontre d'un côté l'angle CBD obtus, & de l'autre côté l'angle EBD aigu, & trouve plus de

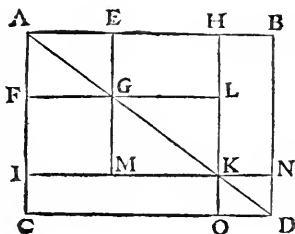
corps, & partant plus de résistance du côté de l'angle obtus que du côté de l'aigu: ainsi elle se détourne par un chemin un peu courbe vers I, lequel elle ne quitte plus lors qu'elle est assez enfoncée dans l'eau: car bien qu'il y ait toujours plus d'eau au dessous de BI, que non pas au dessus, néanmoins à cause de son enfoncement, elle trouve la résistance d'une part aussi forte que de l'autre, ce qui fait qu'elle continuë à se mouvoir vers I.

Mais lors qu'elle entre dans l'eau par la ligne A b trop inclinée, d'autant qu'avant d'être parvenue dans l'eau en un endroit auquel la différence de la résistance des deux parties de l'eau lui fut insensible, il faudroit qu'elle eut (pour ainsi dire) labouré un long fillon d'eau, & agi pendant trop long-temps contre la résistance de l'eau du côté inférieur; de sorte que par cette action elle perd l'impression de s'enfoncer davantage; & la figure que nous supposons être ronde, quoi qu'elle tienne de la nature & des propriétés d'un coin qui fendroit l'eau, la porte vers la partie la plus foible, c'est-à-dire vers la superficie supérieure de l'eau, & quelquefois au dessus de la même superficie; ce qui est assez intelligible.

Voiez ce que dit *M. Des Cartes* sur ce sujet dans les pages 21, 22. & les suivantes.

L'on pourroit déduire un grand nombre de belles conclusions de cette proposition du mouvement composé de deux droits : mais puisque dans ce petit Traité notre but principal est de tirer du mélange des mouvemens une méthode générale pour trouver les touchantes des lignes courbes, nous ne nous arrêterons pas davantage à cette proposition.

Mais avant que de passer outre, nous remarquerons deux choses : la première, que le diamètre AD eût pu être décrit par un point porté de deux mouvemens droits AB, AC, desquels ni l'un ni l'autre n'eût été uniforme. Il eût pourtant fallu qu'à mesure

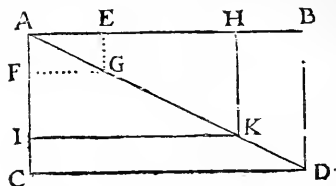


que l'un, comme AB, eût été augmenté ou diminué, la vitesse de l'autre eût été changée à proportion, comme si le mobile eût été porté en AB d'un mouvement fort lent depuis A jusques à E, & d'un fort vite depuis E, jusques en H, &c. pour lui faire décrire la ligne AD, il auroit fallu qu'ayant divisé AC en même raison qu'AB dans les points F & I, la ligne AB eût descendu fort lentement d'A vers F, & fort vite de F vers I ; ce que l'on pourra mieux concevoir, si l'on considère le mobile en G, comme devant en même temps être porté de deux mouvemens uniformes, & desquels les vitesses sont entre-elles, comme les lignes GL & GM le long des mêmes lignes GL & GM, &c.

Secondement, il nous sera facile de voir que si le mo-

bile eût été porté sur les lignes A B, A C par deux mouvemens droits, mais différens l'un de l'autre, en telle sorte que les parties de l'un n'eussent pas eû toujours même

Mot expliqué, mais facile à entendre.



raison avec les parties de l'autre, en ce cas le mobile eût décrit une ligne courbe; comme si les deux mouvemens eussent été difformes ou disproportionnés, lors que le mobile étant en E dans la ligne A B, il eût été en F, dans la ligne A C, & qu'étant en H, il eût aussi été en I, la ligne décrite par le mouvement mêlé de ces deux auroit été la courbe A G K D, &c.

Et cette considération ne fera pas des moins utiles pour la recherche des touchantes des lignes courbes, comme l'usage le fera découvrir.

Proposition Troisième.

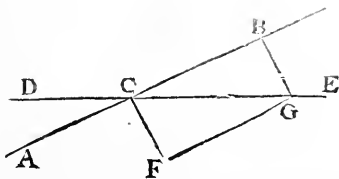
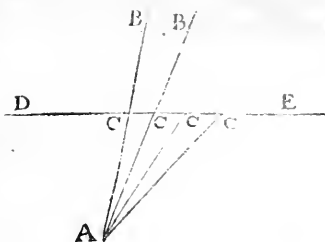
BIEN que ce que nous avons dit jusques ici des mouvemens mêlez pût suffire pour nous en faire comprendre la nature, néanmoins puis que leur connoissance est un principe d'invention pour quantité de belles vérités, il sera peut-être à propos d'en considérer ici divers autres mélanges, quoique tout ce que nous en dirons ait une grande étendue, à cause que ce ne sont ici que les élémens de cette science.

Nous avons expliqué dans les propositions précédentes comment une ligne droite peut être entendue décrite par un mouvement uniforme mêlé de deux droits & uniformes, ou par un mouvement inégal mêlé de deux droits & difformes, &c.

Or

Or la même ligne

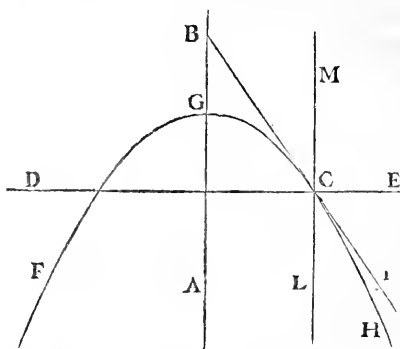
droite peut aussi être entendue d'écrite par une infinité d'autres mouvemens, par exemple, par un mouvement droit & un circulaire, comme si la droite ACB se mouvant circulairement autour du centre A , un point, comme C , est porté dans la même ligne en sorte qu'il se trouve toujours dans la commune section de la même ligne AB , & d'une autre DE : nous dirons que la ligne DE est décrite par un mouvement mêlé d'un droit qui se fait le long de la ligne AB , & d'un circulaire que la même ligne AB communique au mobile qui le décrit par son mouvement droit; & ces deux mouvemens sont tels, quoique bien difformes, que si l'on nous donne de position le point A & la ligne DE , quelque point que l'on prenne dans la ligne DE , la proportion de l'un de ces mouvemens à l'autre sera donné.



Car ayant prolongé la ligne AB par delà la ligne DE , comme en B si du point C auquel nous voulons connoître la proportion de ces deux mouvemens, nous tirons CF perpendiculaire à AB , nous aurons la direction du mouvement circulaire qui se fait en C ; mais les deux autres directions sont données, AB du mouvement droit simple, & DE du mouvement composé. Donc les trois

impression nous sont données, ou la proportion de chacun des mouvemens aux deux autres.

Nous pouvons encore imaginer que la même ligne est décrite par un mouvement mêlé de deux, l'un parabolique, l'autre droit, desquels nous pourrions en comprendre, un uniforme comme si la parabole étant portée par

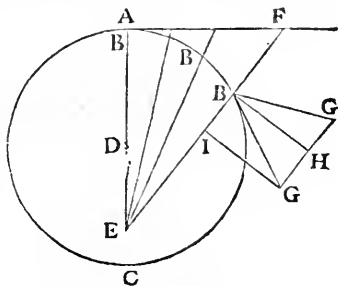


un mouvement droit, en forte que l'un de ses diamètres soit toujours sur la ligne AB, un point C se promene de telle forte dans la parabole, qu'il se maintienne toujours dans la ligne DE; & en ce cas si la touchante de la parabole en C. nous est donnée; nous connoîtrons ces trois mouvemens, c'est-à-dire les viteſſes de chacun des trois comparé aux deux autres, puisque leur trois directions nous ſont données, où vous remarquerez que la direction du mouvement droit ſimple eſt la ligne AB, c'est-à dire, une ligne LCM parallèle à AB.

Ce que nous avons dit de la parabole se doit encore entendre du cercle, de l'hyperbole, de l'ellipse, & généralement de toute autre ligne; de sorte que la ligne DE pouvant être entendue décrite par un mouvement composé d'une infinité de mouvemens droits, & chacun de ceux-là d'un droit & d'un circulaire, ou d'un droit & d'un parabolique, &c. vous voyez que la même ligne pourra être décrite par une infinité de mouvemens, cha-

cun différens en espèce de tous les autres.

Et pour montrer que nous pouvons dire du cercle, de la parabole, & d'une infinité de lignes courbes, ce que nous avons dit de la droite; soit la circonférence du cercle ABC , le centre du cercle D , & un point E dans le



cercle autre que le centre, & soit tirée la ligne EDA : vous voyez donc que si la ligne ED tourne autour de E , & qu'en même temps un point B se promène sur la même ligne, en sorte qu'il se maintienne toujours dans la circonférence ABC , cette circonférence sera décrite par le mélange d'un mouvement droit & d'un circulaire. Et vous voyez encore, que si l'on veut sçavoir la raison de ces deux mouvemens l'un à l'autre, la touchante de la circonférence nous étant donnée en un point, cette raison nous sera donnée en ce même point, comme si la touchante AF nous est donnée au point A , & la position de la ligne EDA , nous verrons que cette ligne étant perpendiculaire à AF , elle est la ligne de direction du mouvement circulaire simple, qui se fait à l'entour du point E ; mais elle est aussi la direction du mouvement circulaire composé, puis qu'elle touche la circonférence ABC , par laquelle se doit faire ce même mouvement composé; d'où il s'ensuit que le mobile qui décrit la circonférence ABC par son mouvement, n'a au point A qu'un seul mouvement circulaire, duquel la direction est AF .

Mais si l'on donne la touchante BG en un autre point de la circonférence, comme en B , le point E étant encore donné, nous menerons la ligne EB , qui sera la direction du mouvement droit, & BH sa perpendiculaire sera la direction du mouvement circulaire simple à l'entour du point E ; mais la direction du mouvement composé est aussi donnée, sçavoir la touchante BG , nous connoîtrons donc la vitesse de ces trois mouvemens, & nous comparerons chacun deux au deux autres.

Comme au contraire, si l'on nous eût donné les points E & B , & la raison du mouvement droit au mouvement circulaire simple, comme de GH à BH , nous aurions trouvé la touchante du cercle.

Il nous sera aussi facile de concevoir que la même circonférence peut être décrite par un mouvement droit & un parabolique, ou par un droit & un hyperbolique, &c. comme nous avons dit de la ligne droite.

Et pour finir en deux mots cette spéculation, nous pourrons dire de la parabole, de l'hyperbole, & des autres lignes courbes, ce que nous avons expliqué du cercle.

Proposition quatrième.

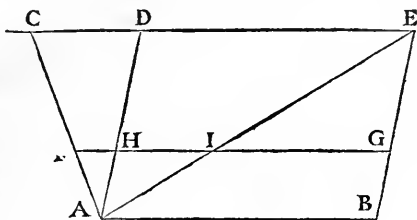
Toute cette proposition est mal digérée, & il vaut mieux la passer que de s'y arrêter.

SI deux lignes droites faisant l'une avec l'autre tel angle qu'on voudra, viennent à se mouvoir parallèlement chacune à soi-même, en telle sorte qu'elles se puissent toujours couper l'une l'autre, & que la vitesse de la première soit donnée dans la seconde, & la vitesse de la seconde donnée dans une troisième, qui fasse tel angle qu'on voudra au point de leur départ: le point qui se rencontrera toujours dans leur commune section sera porté par trois mouvemens, deux desquels étant réduits à un, l'on trouvera que le mouvement de ce point dans la seconde

ligne aura été hâté, quoique toujours uniformément, en sorte que par le mouvement composé de ces trois, il aura décrit une ligne d'un mouvement uniforme, &c.

Cette proposition seroit extraordinairement longue, c'est pourquoi nous expliquerons le reste ci-après.

Supposons que la droite AB comprenant tel angle qu'on voudra en A avec la droite AD, l'une & l'autre de ces deux lig-



nes viennent à se mouvoir parallèlement à soi-même & uniformément, AB vers D, & AD vers B, & que la vitesse de la ligne DA soit donnée dans AB & la vitesse de AB, soit donnée dans une troisième ligne AC, en telle sorte que lors que le point A de la ligne DA sera arrivé en B, en même temps le point A de la ligne BA arrivera en C. Je dis que le point qui se rencontre toujours en la commune section des deux lignes AB, AD sera porté par trois mouvemens droits, l'un par la ligne AD, & les deux autres par la ligne AB, en sorte que ladite ligne AB étant prolongée à l'infini, il parcourra une plus grande ligne sur AB, qu'il n'eût fait si la vitesse du point A de la ligne AB eût été donnée depuis A jusques en D, & que la ligne qu'il décrira par le mouvement mêlé de ces trois sera le diamètre AE du parallelogramme DB, & que son mouvement sur AE sera uniforme.

La première partie de cette proposition est assez intelligible de soi-même, car quand nous ne donnerions point de mouvement à la ligne DA, & que la ligne

AB se mouvant, en sorte que son bout A décrivant la ligne AC, un point fût porté le long de AB, commençant son mouvement en A à telle condition qu'il dût toujours être en la commune section des deux AB, AD; il est clair que ce point auroit deux mouvemens sur la ligne AD, l'un AC, par lequel la ligne AB s'efforceroit de le porter d'A vers C. l'autre CD, par lequel il seroit ramené de C vers D, pour décrire la ligne AD. Mais si ces deux mouvemens étant ainsi prouvés, nous faisons encore mouvoir la ligne AD vers B, ce point aura encore un mouvement par lequel il suivra la ligne AD: il est donc vrai qu'il a trois mouvemens, &c.

Ce que nous pouvons encore examiner en cette sorte, posé que le point A de AB dût parcourir AD, & que A de AD dût parcourir AB, il est certain que le point qui se rencontreroit toujours sur leur commune section seroit porté par deux divers mouvemens, comme nous avons démontré en notre première proposition: mais faisant que le point A de AB décrive AC, au lieu de AD, ce point a encore un mouvement par lequel la ligne AB s'efforce de le porter le long de AC, ainsi pour lui résister il faut qu'il se hâte davantage sur AB en sorte qu'il y décrive une plus grande ligne qu'il n'eût fait, si A de AB eût parcouru AD: donc le point a trois mouvemens, &c.

Or nous démontrerons en cette façon que le mouvement composé de ces trois est droit & uniforme, & le long du diamètre AE. Car aiant tiré la ligne FHIG parallèle à AB coupant, &c. lors que le point A de AB sera en F, si la ligne AD n'a pas changé de place, le point de la commune section aura eû deux mouvemens uniformes AF, FH, que nous réduirons à un seul AH, par la première proposition, en sorte que ce point sera en H, de la ligne AHD. Mais en même temps le point

24 DES MOUVEMENS COMPOSÉS:

ces quatre mouvemens étant réduits aux deux FC, FO, par la première proposition, par la même proposition le point de commune section des deux lignes FC, FO, aura décrit la ligne FM, qui est ce qu'il falloit démontrer.

** Je dirois ainsi : Le point F en FC, se mouvant vers LM, a deux mouvemens droits & uniformes, FL, LO, qui composent un mouvement droit FO.*

Semblablement ledit point F en FO, se mouvant vers NM, a deux mouvemens FN, NC, qui composent FC.

Donc des deux mouvemens FO, FC, sera composé un mouvement FM, qui sera composé de tous ces quatre, & FM est diagonale, &c.

Nous aurons besoin de cette proposition comme d'un lemme, pour les touchantes de la quadratrice, & peut-être de quantité d'autres lignes.

P R O B L E M E I.

Proposition cinquième.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connoître les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention.

Regle

Règle générale.

PAR les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

Vous trouverez dans les exemples suivans les touchantes des sections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limacon de Monsieur Pascal, de la Roulette de Monsieur Rob. de la Parabole du second genre de Monsieur Desc. &c.

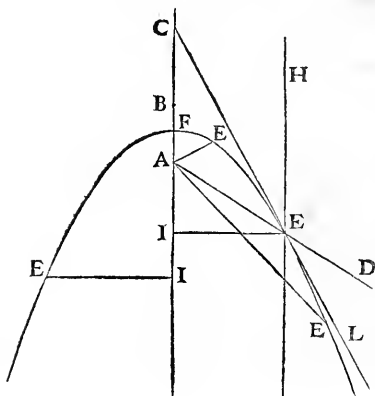
Premier exemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de le décrire par la cinquième méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25. qui est telle.

Le sommet & le foyer de la parabole étant donnez de position, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

Soit A le foyer, & F le sommet: soit tirée la ligne AF & prolongée de F vers B, & soit FB égale à AF la même ligne BFA sera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA; du

centre A & de l'intervalle d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole passera par les points E.



Cela posé si l'on demande la touchante de la Parabole au point E, soit tiré la ligne A E prolongée comme en D, & la ligne E I perpendiculaire à AB, & encore la ligne H E parallèle à l'axe FAI, alors il est clair par la description ci-dessus, que le mouvement du point

E décrivant la Parabole, est composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un est la ligne A E, & l'autre est la ligne H E sur laquelle il se meut de même vitesse que le point I dans la ligne B A, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne A E par la construction, puisque A E est toujours égale à B I. Partant puisque la direction de ces mouvemens égaux est connue, sçavoir suivant les lignes droites A E D, H E données de position, si vous divisez l'angle A E H en deux également par la ligne L E C : qui est le diamètre d'un rhombe autour de l'angle A E H, (& par conséquent la direction du mouvement composé des deux H E A E,) la ligne L E C sera la touchante.

Avant que de passer outre, remarquez deux choses.

La première, que nous n'avons pas voulu considérer le point E comme commune section de deux lignes, dont l'une A E infinie se meut circulairement autour du point A ; l'autre I E aussi infinie descend parallèlement à soi-même, ayant toujours son extrémité I dans la ligne B A, puisqu'il a été plus facile de considérer les mouvemens A E, H E du point E en chaque endroit de la section de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens A E, H E son égaux l'un à l'autre, ce qui sera vrai, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'ensuit pas que tous les mouvemens d'un point E soient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en ayant qu'un réciproque de l'autre côté de la parabole & également éloigné du sommet. Vous entendrez la même chose en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que notre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. proposition 33, & pour le trouver en quelque façons analitiquement, posons qu'il soit vrai que L E C touche la Parabole en E. Si donc nous abaïssons l'ordonnée E I, I F sera égale à F C, & ajoutant F B à I F, & F A à C F, les toutes C A & I B seront égales (car les ajoutées le sont par la construction) mais I B est égale à A E par notre construction, donc C A & A E sont égales, & l'angle A C E égal à l'angle A E C; mais par notre construction nous avons divisé l'angle A E H en deux également, & par conséquent nous avons fait A E C, C E H égaux entr'eux, donc A C E est égal à C E H son alterne, ce qui est vrai, car par la construction E H, est paralelle à C I.

Ou si vous aimez mieux, puisque C I, E H sont paraleles, l'angle A C E est égal à C E H; mais par la con-

struction CEH est égal à AEC , donc ACE & AEC , sont égaux, & le triangle ACE isoscèle, donc CA est égale à AE . Mais encore par la construction AE est égale à BI , CA est donc égale à BI , & en ôtant les égales AF , BF , CF sera, égale à FI , & par conséquent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que si l'on nous eût donné la description de la parabole par un point, comme E se promenant le long de la ligne IE du mouvement uniforme, en même temps que la ligne IE descend parallèlement à soi-même, d'un mouvement très-inégal, mais tel que le carré de IE est toujours égal au rectangle sous IF , & une ligne donnée nommée P , qui en ce cas est le côté droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problème.

La première (comme P) de trois lignes continuellement proportionnelles nous étant donnée, & un mouvement égal dans la seconde IE trouver le mouvement qui se fait dans la troisième FI , ce qui est un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore proposer le moïen de décrire la Parabole par quelques autres de ses propriétés, ce qui seroit plus difficile.

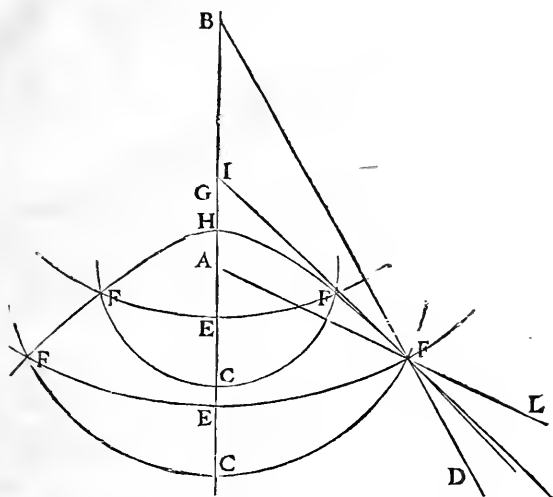
Second exemple des touchantes de l'Hyperbole.

N O U S la décrirons avec M. Myd. liv. 2. prop. 26. en cette sorte.

Le sommet & le deux foyers ou points de comparaison de l'Hyperbole étant données de position, décrire l'Hyperbole par des points dans le même plan.

Soient les foyers AB , & H le sommet, donc la ligne droite AB passera par H . Prenons HG égale à HA , & prenons dans HA , prolongée, s'il en est besoin, tant de points que nous voudrons, comme E , par les-

quels de B comme centre décrivons des arcs de cercle



EF, & du centre A & de l'intervalle, dont chaque point E est éloigné de G, d'écrivons d'autres arcs de cercle CF, qui coupent les premiers, comme en F, l'Hyperbole passera par tous les points F.

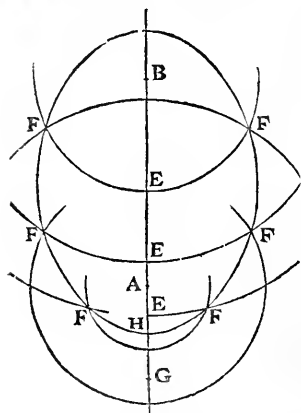
Cela posé, si je veux tirer la touchante de l'hyperbole, comme en F, aiant prolongé AF, comme en L, & BF, comme en D, sans m'amuser à considérer que l'hyperbole est décrite par le point F, qui est toujours la commune section des deux lignes droites BFD, AFL, lesquelles se meuvent circulairement, la première autour du centre B l'autre au tour du centre A, je vois qu'en quel lieu que je prenne le point F, si je le considère décrivant l'hyperbole à commencer du som-

met, il a deux mouvemens ; l'un, par lequel il s'éloigne d'A, le long de la ligne AL ; l'autre par lequel il s'éloigne de B le long de la ligne BD. Puis donc qu'il s'éloigne également d'A & de B, & que les deux directions sont FL, FD, aiant fait un rhombe duquel l'angle soit DFL, c'est à sçavoir, aiant divisé l'angle DFL, en deux parties égales pour avoir le diamètre de ce rhombe, qui sera la direction du mouvement composé, la ligne MFI qui partage cet angle sera la touchante de l'hyperbole.

Apoll. démontre liv. 3. prop. 48. que l'angle IFA est égal à l'angle IFB.

Troisième exemple des touchantes de l'Ellipse.

VOIC Y comme M. Myd. la décrit par sa cinquième méthode générale, l. 2. prop. 27.



Les deux foyers, & l'un ou l'autre sommet de l'ellipse étant donnez de position, d'écrire l'Ellipse par des points touvez sur le même plan.

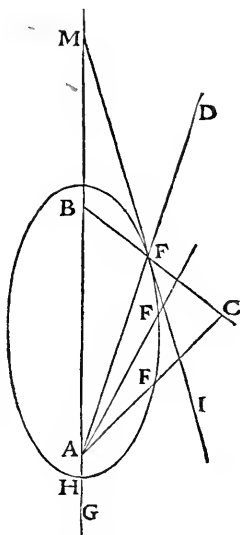
Soient les foyers ou points de comparaison A & B, & H le sommet.

Donc la droite AB prolongée passera par H, soit pris HG égale à AH, & du centre B de tant & de tels intervalles qu'on voudra plus grands pourtant que AH, & moindres que

BH, comme BE, décrivez des arcs de cercle, comme EF, & du centre A & de l'intervalle, qui est entre cha-

cun de ces arcs, & le point G décrivez d'autres arcs qui coupent chacun des premiers, comme en F, l'Ellipse passera par les points FF.

L'Ellipse étant ainsi d'écrite, s'il faut tirer sa touchante comme en F, aiant tiré les lignes BFC & AFD, soit que je considère les deux mouvemens du point F en BC, & AD, ou comme s'éloignant de B dans FC, auquel cas il s'approche d'A dans FA, ou comme s'éloignant d'A dans FD, auquel cas il s'approche de B le long de FB, puisque le point F s'éloigne autant de l'un des points AB, qu'il s'approche de l'autre, & que les directions de ces deux mouvemens sont BFC, & AFD, je n'ai qu'à diviser l'un des deux angles AFC, ou BFD en deux également par la ligne IFM, elle fera la touchante de l'Ellipse.



Apoll. dans la même 48. du troisieme veut que l'angle AFI soit égal à l'angle BFM, ce qui s'accorde à notre méthode, car les angles AFC, BFD (au sommet l'un de l'autre) étant égaux, leurs moitiez AFI, BFM le seront aussi, ce qu'il falloit démontrer.

J'oublois de mettre en deux mots la construction de ces trois exemples, pour servir de règle générale.

Pour tirer les touchantes des sections coniques.

POUR la Parabole, étant donné le sommet & le foyer par le point où vous voulez la touchante, tirez une ligne parallèle à l'axe, & une autre ligne jusqu'au foyer, divisez en deux également des quatres angles que ces deux lignes font, les deux que le parabole coupe, la ligne qui fera cette division sera la touchante.

Pour l'Hyperbole & l'Ellipse, les deux foyers étant donnez par le point où vous voulez la touchante, tirez deux lignes aux deux foyers des quatre angles que ces lignes feront en ce point, divisez en deux également les deux opposez que la section conique coupe, la ligne qui fera cette division sera la touchante.

Quatrième exemple des touchantes de la Conchoïde de dessus, de Nicomede.

BIEN que l'on puisse décrire une infinité de lignes courbes, chacune desquelles sera conchoïde & atymptote à une même ligne droite, si est-ce que nous n'en considérons que de deux sortes ou genres, suivant qu'elles sont décrites, ou entre leur pole & la ligne droite, qui leur sert de base, règle ou asympote, ce que nous appellons la conchoïde de dessous; ou que cette ligne droite soit entre le pole & la conchoïde, ce que nous appellons la conchoïde de dessus, ou de Nicomede; parce que, quoique leurs courbures soient routes différentes les unes des autres, n'étant moins la méthode pour en trouver les touchantes n'en considère que ces deux cas.

Vous remarquerez que le pole de la conchoïde ne peut pas être dans la ligne qui sert de règle ou de base à la conchoïde, car la ligne qui seroit décrite de cette sorte
seroit

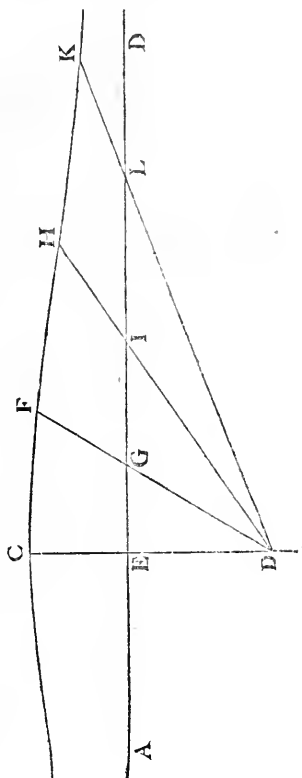
forte seroit un demi-cercle, dont la ligne droite qu'on auroit prise pour base de la conchoïde, seroit le diamètre, &c.

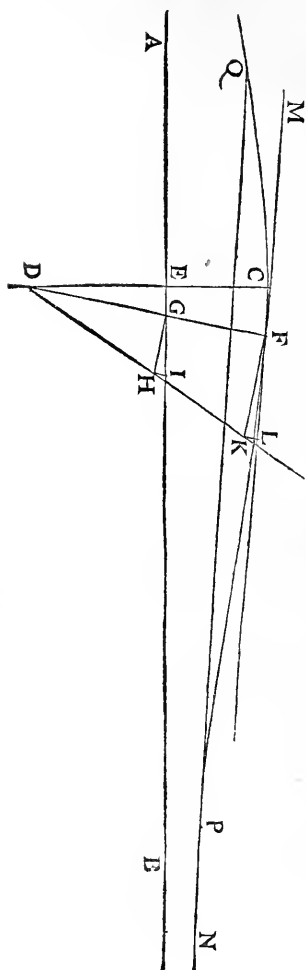
La Conchoïde de dessus se décrit en cette façon.

Soit la droite infinie AD à laquelle il faut tirer une conchoïde, de laquelle le sommet soit C. Du point C tirez CD perpendiculaire à AB coupant AB en E, & dans CD prenez un point comme D, en forte que la ligne AB soit entre les deux points C & D, puis de D tirez quantité de lignes occultes, comme DGF, DIH, &c. vers la ligne AB qui la rencontrent en GIL &c. puis prenez les lignes GF, IH, LK, chacune égale à EC, la Conchoïde passera par les points FHK &c.

Ayant ainsi décrit la Conchoïde, il sera facile d'en tirer les touchantes, par exemple au point F.

Considérons que la conchoïde est décrite par deux mouvemens du même point; l'un par lequel il monte le long de la ligne





DF; l'autre par lequel la ligne DF se mouvant circulairement sur le centre D, emporte le même point de C par F vers K; & bien que nous fassions que les directions de ces deux mouvemens sont l'une la ligne DF pour le mouvement droit, l'autre FK perpendiculaire à DF par notre principe, pour le mouvement circulaire, si est-ce que nous n'en sçaurions découvrir la raison ne le considérant que dans la conchoïde si nous connoissons la touchante de la conchoïde, qui est la direction du mouvement composé de ces deux. Cela nous oblige à examiner ou les mêmes mouvemens, ou d'autres qui leur soient proportionnez hors de la conchoïde.

Or il est très-facile de les examiner dans la ligne droite, qui est la règle ou base de la conchoïde, si nous confide-

rons qu'elles est décrite par un point G, qui monte dans la ligne DGF, autant que fait le point F dans la même ligne DGF; car puisque les lignes EC, GF sont égales par la construction, l'excès de la ligne DF sur la ligne DC est le même que l'excès de DG sur DE. Donc le point E est autant monté allant de E jusqu'à G, que le point F allant de C jusqu'à F. Et pour le mouvement circulaire de G, non-seulement nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement droit G, leurs deux directions & celle de leur mouvement composé nous étant données, mais aussi nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement circulaire F en cette façon.

Tirez GH perpendiculaire à DG; d'un point de DH comme H, tirez HI parallèle à DG, qui coupe la règle EGB en I: vous avez donc la raison du mouvement circulaire G au mouvement droit G, comme de GH à HI; & puis que le mouvement droit G est égal au mouvement droit F, reste d'avoir la raison du mouvement circulaire F au mouvement circulaire G; & parce que ces mouvemens sont entr'eux comme les circonférences de leurs cercles, c'est-à-dire en même raison que leurs demi-diamètres DF, DG, il faut donc faire que comme DG à DF, ainsi GH soit à une ligne prise dans FK. Or la construction en est très aisée car vous n'avez qu'à tirez la ligne DHK rencontrant FK en K, d'autant que les triangles DGH, DFK seront semblables. Vous avez donc la raison du mouvement circulaire F au mouvement droit F, comme de FK à KL ou HI. Donc si par K vous tirez KL parallèle à DF, & égale à HI; puisque les deux FK, KL sont les directions des deux mouvemens F, & en même raison que ces deux mouvemens, la droite LF étant menée, elle fera la direction du mouvement composé de ces deux, c'est-à-dire, la touchante de la Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

En deux mots le Pole D & la règle AB de la Conchoïde étant donnez de position, & un point de la Conchoïde F, tirez DF qui coupe AB en G, sur les points G & F, tirez GH & FK perpendiculaires à DF, faites l'angle FDK aigu *ad libitum*, tirant la ligne DK qui coupe GH en H, & FK en K, tirez HI parallèle à DF coupant AB en I, puis tirez KL égale & parallèle à HI, le point L sera dans la touchante au point F.

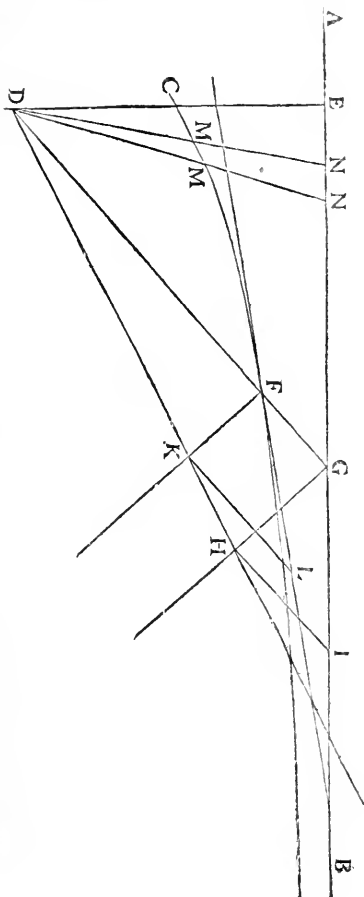
Remarquez que d'autant que la Conchoïde change de courbure, le point L se peut rencontrer entre la Conchoïde & sa base ou règle AB, puis qu'en ce cas le convexe étant en dedans, la ligne LF la touche aussi en dedans entre la droite AB.

Remarquez encore qu'au lieu que les touchantes du Cercle, de la Parabole, de l'Hyperbole & de quantité d'autres lignes ne rencontrent ces mêmes lignes qu'au point de l'atouchement; en la Conchoïde tout au contraire la ligne FL étant prolongée vers L coupera la Conchoïde prolongée vers N, & la touchante d'un point du convexe en dedans, comme de P, étant prolongée du côté du sommet C de la Conchoïde, rencontra la conchoïde comme en Q, ce qui est évident, puisque ces touchantes (excepté celle du sommet C) n'étant point parallèles à la ligne AB, rencontrent nécessairement la même ligne; & partant, puis que l'inclinaison de la touchante FL est vers L, & que la Conchoïde passe entre L & AB, elle rencontrera nécessairement la Conchoïde, & la coupera vers L comme en N, ce que la touchante du point P ne pourra pas faire, quoi qu'elle ait son inclinaison sur AB, de même côté que L: d'autant que vers cet endroit elle est plus proche de AB que n'est pas la Conchoïde, mais elle rencontrera la Conchoïde vers le sommet C, ou au-delà, comme en Q, d'autant qu'elle s'éloigne de AB vers ce côté-là, où au contraire la Conchoïde commence en C de s'en approcher.

Cinquième exemple des touchantes de la Conchoïde de dessous.

NOUS nous servirons mot à mot de la règle de l'exemple précédent; & pour en faire l'application, il ne faut que sçavoir d'écrire cette ligne.

Soit en cette la figure la ligne droite & infinie AB , que nous prenons pour la règle ou base de notre Conchoïde de dessous, & d'un point de la même ligne comme E , soit la perpendiculaire ED à la même ligne, dans laquelle perpendiculaire prenons deux points C & D , le plus proche C pour le sommet de notre Conchoïde, & le plus éloigné D pour son Pole: alors aiant tiré au point D quantité de lignes occultes DMN , qui coupent AB en N , si en chacune de ces li-



gnes DMN de son point N, nous prenons NM égale à CE, nous aurons dans chacune de ces lignes un point M, par lequel notre Conchoïde est décrite.

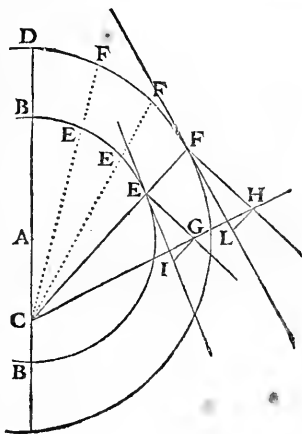
Cela posé, puis que la seule différence, que nous remarquons entre les deux mouvemens du point qui décrit cette ligne, & les deux qui décrivent sa base, d'une part; & les mouvemens semblables qui décrivent la première Conchoïde, & sa base n'est autre, sinon qu'en celle-ci le mouvement circulaire de la ligne est moindre que le mouvement circulaire de sa base, au lieu qu'en l'autre le mouvement circulaire qui décrivait la ligne étoit le plus grand, & qu'en l'une & l'autre le mouvement droit de la ligne est égal au mouvement droit qui en décrit la base, & qu'encore en l'une & l'autre l'on peut comparer le mouvement circulaire de F au circulaire G par le moïen d'une ligne DKH, qui fait un angle aigu GDH arbitraire avec la ligne GD, & laquelle ligne DKH coupe les lignes GH, FK perpendiculaires à la ligne DG aux points H & K: voulant tirer la touchante de cette ligne en un point, comme en F, je tire la ligne DF, que je prolonge jusques à ce qu'elle rencontre la règle AB en G, & sur icelle des points F & G je tire deux perpendiculaires FK, GH, qu'une ligne arbitraire DH coupe en K & en H; du point H je tire HI parallèle à DG coupant AB en I. J'ai donc, comme nous avons déjà dit au précédent exemple, la raison du mouvement circulaire du point G de la ligne DG (posé que ce point doit décrire la règle AB) au mouvement droit du même point, comme GH à HI; mais ce mouvement étant GH, le mouvement circulaire du point F de la ligne DFG décrivant la Conchoïde fera FK, & le mouvement droit du point F est égal au mouvement droit du point G: je tire donc KL égale & parallèle à HI; & puis que la Conchoïde, & par conséquent sa

touchante est décrite par un mouvement mêlé des deux FK , KL , la ligne LF sera sa touchante au point F ; ce qu'il falloit faire.

Sixième exemple de quelques autres Conchoïdes.

L'ON peut décrire des Conchoïdes aux lignes courbes aussi-bien qu'à la ligne droite; & pour en trouver les touchantes, il faut premièrement connoître la touchante de la ligne courbe, qui est comme la règle ou base de la Conchoïde: or nous n'avons pas eû besoin d'une touchante de la règle ou base aux deux exemples précédens, parce qu'à proprement parler il n'y a que les lignes courbes qui aient des touchantes; l'on peut néanmoins dire que la ligne droite n'ayant point d'autre touchante, elle peut être considérée comme se touchant soi-même, & que c'est en cette façon que nous l'avons considérée aux deux exemples précédents.

Pour donner une exemple de ces Conchoïdes, soit proposé un cercle duquel le rayon est AB , le centre A , & soit pris un point dans AB , prolongée, ou non, comme C , lequel nous prendrons pour le Pole de notre Conchoïde; puis aiant prolongé CAB hors le cercle, comme en D , soit pris BD arbitraire pour l'intervalle de notre Conchoïde; enfin du Pole C tirons quantité de lignes occultes CE coupant



le cercle en E, & prenons du point E dans lesdites lignes les intervalles EF égaux à BD, & d'une même part que BD, c'est-à-dire, en dehors du cercle si nous avons pris D en dehors dans le diamètre prolongé, ou en dedans si le point D a été pris en dedans cette Conchoïde passera par le point FFF &c.

Or il est fort facile de tirer la touchante de cette ligne si nous considérons qu'elle est décrite par un mouvement mêlé d'un droit & d'un circulaire, desquels la direction nous étant donnée, il est très-facile de trouver la raison de l'un à l'autre; car si nous voulons tirer une touchante de cette ligne en un point comme F, aiant tiré la ligne CF qui coupe la circonférence du cercle en E, & des points FE aiant tiré les perpendiculaires FH, EG sur la ligne CF; il est aisé de remarquer que la ligne CBD aiant tourné sur le centre C, & aiant changé la position par laquelle elle n'étoit qu'une même ligne avec CEF, son point B est descendu en E, pour décrire le cercle, & son point D est descendu en F, pour décrire la Conchoïde du cercle, & qu'il s'ensuit que la ligne CEF est la direction du mouvement droit de chacun de ces points & de celui qui décrit le cercle, & de celui qui en décrit la Conchoïde, & les lignes EG, FH sont les directions des mouvemens circulaires. Or les mouvemens droits sont égaux, puis que la différence des lignes CD & CF est égale à celle des lignes CB & CE, de sorte qu'il ne reste qu'à connoître la quantité de l'un de ces mouvemens droits, & la raison des mouvemens circulaires entr'eux. Pour cet effet tirez EI touchante du cercle, & CH qui fasse un angle aigu avec CF (comme nous avons fait en la Conchoïde ci-dessus) & qui coupe EG, FH en GH, les directions des trois mouvemens EC, EG, EI étant données trouvez-en les proportions, ce que vous ferez tirant

rant GI parallèle à CF , le mouvement droit du point E fera GI , & son mouvement circulaire sera EG : mais le mouvement circulaire étant EG , le mouvement circulaire du point F est FH (à cause que ces deux mouvemens sont entr'eux, à sçavoir EG à FH , comme le demi-diamètre CE est à CF) vous n'avez donc qu'à prendre HL égale & parallèle à GI , pour le mouvement droit du point F , & tirer la ligne de direction LF de celui que les deux FH & HL composent, & vous aurez la touchante de cette Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

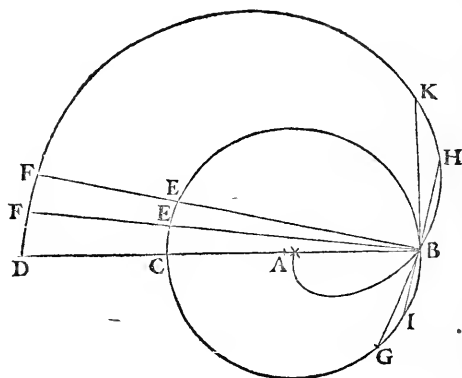
Dans la figure de cet exemple nous avons pris le point C au dedans du cercle, & le point D en dehors: nous eussions pû les prendre ou tous deux en dedans, ou tous deux en dehors, ou le Pole en dehors, & le point de l'intervale en dedans. De plus nous pouvions prendre l'intervale plus grand ou plus petit, de sorte que notre Conchoïde eût fort approché de la figure d'une Ellipse. Enfin de quel intervalle que nous eussions décrit notre Conchoïde, si nous eussions pris pour son Pole le point A centre du cercle, il est évident que notre ligne eût aussi été un cercle: mais ces choses étant très-faciles, la méthode d'en tirer les touchantes n'aïant en toutes ces lignes qu'une même application, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Mais nous remarquerons en passant, que l'on peut tirer des Conchoïdes par cette même méthode, & en tous ces divers cas à l'Ellipse & aux autres sections coniques, & généralement à toutes les lignes courbes, même aux Conchoïdes &c. & en tout ces cas l'application de notre méthode de tirer les touchantes sera toujours la même, si nous supposons qu'on nous ait donné la touchante de la ligne principale, dont nous examinons la conchoïde, ou des propriétés spécifiques pour la trouver,

Septième exemple, du Limaçon de M. P.

*C'est encore une espèce de Conchoïde de cercle, de laquelle
voici la description.*

SOIT proposé le cercle $CGBE$, duquel le centre est A , le diamètre BC prolongé autant qu'il sera besoin, comme en D soit pris B pour le Pole de notre

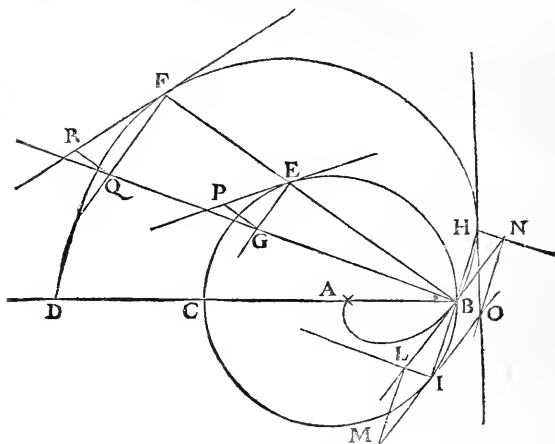


Limaçon, & CD pour l'intervalle duquel on se doit servir pour le décrire, moindre que le diamètre. De B tirez quantité de lignes occultes BEF , qui coupent la circonférence du cercle en E , & prenez EF en chacune de ces lignes égale à CD , & de même côté, le Limaçon passera par tous ces points FF . Or il faut remarquer que l'on prend autant d'intervalles que l'on peut à commencer de la partie convexe du cercle, qui est d'un même côté que le Limaçon au regard de la ligne DCB , & que voulant

continuer cette ligne il faut prendre les points E dans l'autre demi-circonférence, qui a sa concavité tournée vers le Limaçon, ainsi le point B du Limaçon est le réciproque du point G de la circonférence du cercle lors que B G est égale à C D; & le dernier point du Limaçon que nous avons marqué d'une petite * est le réciproque du point C, & les points du Limaçon d'entre B & * sont les réciproques des points de la circonférence G C, comme les points les plus proches de B au-dessus du diamètre C B dans le même Limaçon, sont les réciproques des points de la circonférence G B, ainsi H est le réciproque du point I jusqu'au point K qui est le réciproque du point B, & vous voyez par là la vérité de ce que nous avons remarqué que l'intervalle C D ne doit pas être plus grand que le diamètre C B, car autrement l'on ne pourroit pas décrire la portion * B du Limaçon, même selon les divers intervalles que l'on auroit pris, on n'auroit pas pû décrire la portion du même Limaçon la plus proche de B au-dessus du diamètre C B. Il est vrai que pour ce qui est de cette méthode des touchantes, il ne nous importe point que cette ligne soit grande ou petite, entière & terminée en un point du demi-diamètre A B, ou tronquée &c. parce que les mouvemens de la description de l'une & de l'autre de ces lignes étant par tout les mêmes, l'on en donne les touchantes de la même façon. Mais voulant examiner un autre moyen de décrire cette ligne, & dire quelque chose de son usage, ce que nous ferons ci-après, il y a fallu ajouter cette restriction.

Il est aussi facile de tirer les touchantes de cette ligne que des Conchoïdes précédentes, la méthode en est la même, & les deux mouvemens, l'un droit, l'autre circulaire, qui décrivent cette ligne, se doivent examiner de la même façon : car il faut considérer que la

ligne BEF se mouvant circulairement autour du Pôle B jusqu'à ce qu'elle ait la position de BCD, les deux points E & F s'éloignant de B, montent dans la ligne

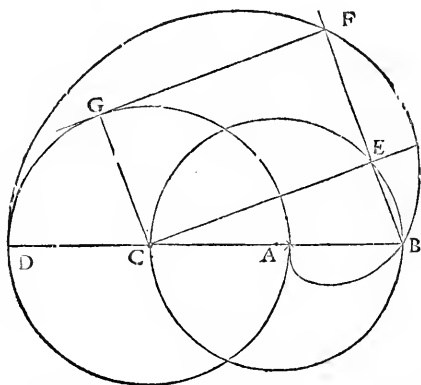


vers D: or puisque E F est égale à C D, la différence des lignes B E, B C est égale à la différence des lignes B F, B D; d'où il suit que le point E qui décrit le cercle a le même mouvement droit dans la ligne B E F, que le point F qui décrit le Limaçon, de sorte que connoissant le mouvement droit du point E nous connoîtrons aussi le mouvement droit du point F: il reste donc à examiner les mouvemens circulaires de ces deux points, desquels les directions sont perpendiculaires à la ligne B E F. Tirez donc les perpendiculaires E G & F Q, & prenez dans E G la partie E G *ad libitum*, pour la quantité du mouvement circulaire du point E, tirez encore la ligne B G Q, puis faites que comme le demi-diamètre B E est au demi-dia-

mètre BF, ainsi EG soit à QF (ce qui se fera par le moïen de la ligne BGQ, faisant un angle aigu *ad libitum* avec BF; & coupant EG en G, & FQ en Q) supposé donc que le mouvement circulaire E soit EG, la quantité du mouvement circulaire F fera FQ; mais supposé EG pour la quantité du mouvement E, l'on trouve que le mouvement droit E est égal à GP (ce qui se fait, aïant tiré la touchante du cercle PE, par le moïen de la ligne GP parallèle à BE, & coupant la touchante en P) comme nous avons rémarqué, & le mouvement droit de F est égal à celui de E, comme nous l'avons expliqué ci-devant. Supposé donc FQ pour la quantité du mouvement circulaire F, le mouvement droit sera GP, c'est à-dire QR égale & parallèle à GP; le point R est donc donné, & par même moïen RF pour la direction & la quantité du mouvement mêlé des deux FQ, QR, c'est-à-dire, notre touchante; ce qu'il falloit faire. (*Voiez la Fig. précéd.*)

Remarquez qu'on doit toujours examiner les deux mouvemens dans le cercle au point réciproque de celui de la Conchoïde, pour lequel nous cherchons la touchante; comme par exemple, si l'on vouloit tirer la touchante du Limaçon au point H assez proche de B, aïant tiré la ligne HB, & l'aïant prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en I, qui sera dans le cercle le point réciproque du point H, comme C est réciproque de D, car par la construction HI est égale à CD, il faudra examiner les deux mouvemens du point I, & en aïant trouvé la raison, chercher la raison de son mouvement circulaire au mouvement circulaire de H &c. En deux mots imaginant que la ligne HI tourne sur le point B, & que la partie BI est portée en dedans du cercle vers C, aïant tiré la perpendiculaire IL vers le côté de C, & par conséquent la perpendiculaire HN vers l'autre côté, pour

les deux directions circulaires ; puis aiant trouvé la raison des deux mouvemens I, comme de IL à LM (par le moïen de MI touchante du cercle BIC) &c. il faudra faire que comme BI est à BH, ainsi IL soit à HN, puis aiant pris NO égale & parallèle à LM, la ligne OH menée par le points O & H, fera la touchante de notre Limaçon.



L'on peut dire que cetteli-gne est décrite par le moïen d'une double équerre CEFB, de laquelle les côtez CE, EB sont prolongez autant qu'il est besoin. Or il n'est

pas besoin que chacun d'eux soit plus grand que le diamètre CAB du cercle CEB, & l'autre côté EF est toujours égal à l'intervale que l'on prend de chaque point du cercle jusqu'à son réciproque dans le Limaçon ; de sorte que faisant tourner l'angle droit CEB, en sorte que son point E décrive le demi-cercle CEB, ce qui se fait lui donnant diverses positions, & toutes dans un même plan, & à condition que la ligne CAB doive être toujours l'hypoténuse des triangles rectangles qu'elle fera avec les parties de GE & EB, l'on n'a qu'à marquer dans le même plan tous les points que

le point F de la double équerre aura décrit.

Or sur cette supposition l'on trouvera les touchantes de cette ligne de la même façon que nous avons déjà fait, parce qu'encore qu'on ne considère pas le point F, comme se promenant le long de la ligne BEF, & même que cette ligne tourne circulairement sur le Pole B, l'on ne laisse pas de connoître les deux mouvemens que lui donne la ligne BEF, qui en cette seconde supposition tournant sur le point B, s'éleve en même temps peu à peu pour conduire l'angle droit BEC de B en C sur la circonférence du demi-cercle BEC.

Mais voici une des belles spéculations qui se puisse sur la description de cette ligne, & par le moyen de laquelle elle a été trouvée par le sieur de Roberval.

Soit proposé le cercle CEB, & l'intervalle CD comme aux figures précédente : du point C & de l'intervalle CD soit décrit le cercle DG*, je dis que si ce dernier cercle DG* est la base d'un Cone scalene du sommet duquel, que nous appellerons S, la perpendiculaire SB tombe en B sur le plan du cercle DG*, aiant tiré des touchantes GF à ce cercle, & du point S tiré des lignes SF perpendiculaires à ces touchantes, que chacun des points F fera dans notre Limaçon, ou si vous aimez mieux que la ligne qui passe par tous ces points FF est la même que le Limaçon du cercle CEB, dont le Pole est B, & l'intervalle est CD. Car si du point B vous joinez la ligne BF, il est certain par un coroll. de la 6. du II. qu'elle sera perpendiculaire à GF. Du centre C tirez CE parallèle à GF, & qui coupe BF en E; GE sera donc un parallélogramme rectangle, & la ligne EF sera égale à CG, c'est-à-dire à CD; mais l'angle CEB étant aussi droit, il est dans un demi-cercle décrit sur le diamètre CB. Il s'ensuit donc que nous trouverons toujours un même point F, soit aiant décrit le cercle DG*, &

BH, & qui coupe la partie * KB du Limaçon (décrit du Pole B au cercle dont le centre est *, le rayon * B & l'intervale du même Limaçon CD est égal à * B) en K ; je tire la ligne BKL, je dis qu'elle fait avec la ligne BH l'angle KBH $\frac{1}{2}$ de l'angle proposé CBH.

Pour le prouver soit décrit le cercle du Limaçon & la ligne BK prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence dudit cercle en L, tirez L*, & ayant divisé * K *bisuriam* en M, joignez LM, laquelle sera perpendiculaire sur * K ; car à cause du Limaçon, le triangle *LK a les côtes L*, & LK égaux, étant égaux à un même CD. Puis donc que les triangles LMK, BIK sont rectangles, & ont les angles oppoſez égaux, ils sont semblables, & l'angle MLK égal à IBK, mais MLK n'est que la moitié de l'angle *LK (parce que le triangle *LK est isoscele, & sa base *K divisée *bif.* &c.) c'est-à-dire, de *BL, (car le triangle *LB est encore isoscele) & partant l'angle KBH n'est que $\frac{1}{2}$ de l'angle *BL, & partant $\frac{1}{2}$ du tout *BH ; ce qu'il falloit démontrer.

Nota si l'on eût proposé l'angle obtus HBO en ayant ôté l'angle droit DBO, & pris HBK $\frac{1}{2}$ du restant, il ne faut que luy ajoûter un angle de 30 degrez qui est $\frac{1}{2}$ de l'angle droit, pour avoir le tiers du total proposé DBO.

Monsieur de Roberval démontre que l'espace contenu sous la ligne droite DC* (soit que DC soit égale ou non à C*) & sous la courbe *KBFFD est égal à l'aggrégé du cercle BHC, duquel la ligne *KBFD est le Limaçon, & du demi-cercle duquel l'intervale de cette même ligne CD est le demi-diamètre, de sorte que si du centre C & de l'intervale CD l'on décrit le demi-cercle DN* l'espace curviligne contenu entre cette demi-circonférence, & le Limaçon est égal au cercle BHC, dont cette ligne est la Conchoïde.

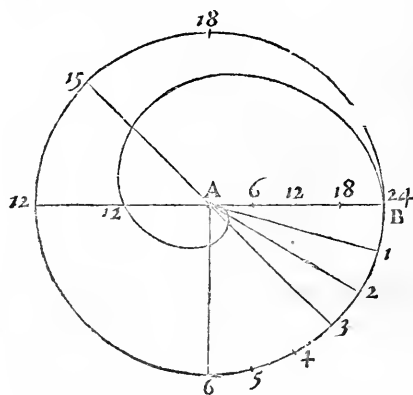
Si l'on continuoit cette ligne de l'autre côté du cercle,

elle représenteroit une sorte de figure en cœur divisée en deux superficies curvilignes, desquelles l'on pourroit faire un semblable examen, les comparant à des portions de cercles, &c.

De la Spirale ou Hélice.

LA première définition du Livre des Spirales d'Archimède nous apprend le moyen de décrire cette ligne; voicy les termes d'Archimède.

Si recta linea in plano, manente altero termino, æquè velociter circumducta rursus restituatur in eum locum à quo primùm cæpit moveri; & unà cum lineâ circumductâ, punctum feratur æquè velociter ipsum sibi ipsi, in eadem lineâ, incipiens à termino manente; ejusmodi punctum spiralem lineam in plano describet.



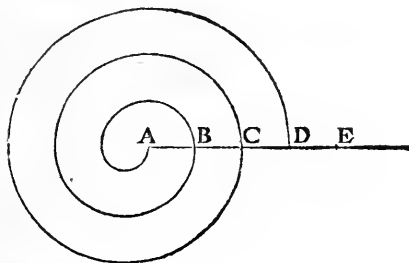
Soit proposé la ligne A B égale à l'intervalle duquel on veut décrire la Spirale du centre A & de l'intervalle AB décrivez le cercle B 3, 6, 12, 18, 24, divisez - en la circonférence en au-

tant de parties égales que vous pourrez commodément, à commencer en B, & divisez la ligne AB en tout autant

de parties égales; tirez les rayons A_1, A_2, A_3 , &c. du point A sur le rayon A_1 prenez une des parties aliquotes du rayon AB; sur le rayon A_2 prenez deux des mêmes parties; 3 sur A_3 , 12 sur A_{12} , 15 sur A_{15} , & ainsi des autres, les points que vous aurez marquez sur les demi-diamètres seront dans la Spirale que vous voulez décrire.

Que si dans la même ligne AB vous prenez BC, CD, DE &c. tant que vous voudrez, chacune égale à AB, & que cependant qu'AB fera une seconde révolution du mouvement uniforme, le point qui étoit venu en B s'avance du mouvement uniforme sur la ligne ABCD jusques en C, ce point décrira l'Hélice de la seconde révolution à commencer en B & finir en C, & ainsi de suite pour les autres révolutions.

D'où il s'ensuit que la méthode est la même pour les autres révolutions que pour la première; car voulant décrire la seconde révolution, il faudra



décrire du centre A de l'intervalle AC une circonférence de cercle, & l'ayant divisée en autant de parties que la première circonférence du rayon AB, à quoi les mêmes rayons tirez du centre A aux points de la première circonférence serviront s'ils sont prolongez, & chacun pris égal à AC; sur le rayon A_1 de cette seconde circonférence, vous prendrez depuis le centre A une ligne égale à $AB + 1$ de ses parties aliquotes, sur A_2 vous prendrez une ligne égale à $AB + 2$ de ses parties aliquotes &c. &

ainsi les points que vous aurez marquez sur les demi-diamètres de ce second cercle seront ceux par lesquels il faudra décrire la seconde révolution de l'Hélice.

Ceci posé, il faut considérer que le point qui décrit la Spirale, en quelque part qu'il se trouve, a toujours le même mouvement droit sur la ligne ABCDE, & ce mouvement est tel par la nature de cette ligne, qu'en même temps que la ligne AB a fait une révolution, ce point doit en même temps avoir parcouru une ligne égale à AB, mais en chaque endroit il change de mouvement circulaire; de sorte que la vitesse de son mouvement circulaire s'augmente toujours à mesure qu'il s'éloigne du centre A; car son mouvement circulaire est tel que ce point décriroit la circonférence dont la portion de la ligne ABCDE, depuis A jusqu'où ce point se rencontre, est le demi-diamètre pendant le temps d'une révolution, c'est à sçavoir en autant de temps qu'il en employe à parcourir par son mouvement droit la ligne AB depuis A jusques en B, ou de B en C, de sorte que puisqu'en B son mouvement est tel que s'il en eût toujours eû un circulaire égal depuis A jusques en B, il auroit décrit une circonférence dont AB est le rayon pendant le temps d'une révolution, & que le mouvement circulaire qu'il a en C est tel que pendant le temps d'une révolution (ou s'il faut ainsi dire d'une circulation de la ligne droite, car le terme de révolution s'attribue plus ordinairement à la Spirale même) il auroit décrit une circonférence dont le rayon est AC double de AB, il s'ensuit que le mouvement circulaire qu'il a en C est double de celui qu'il a en B, & que celui qu'il a en D est triple de celui qu'il en B &c. & ainsi des autres.

Et parce que le mouvement circulaire de ce point est tel, comme nous avons dit, que pendant le temps d'une circulation de la ligne ABCD, il doit décrire une cir-

conférence de cercle dont la ligne depuis le commencement A de la Spirale jusqu'à l'endroit de la Spirale où ce point se trouve, est le demi-diamètre : & de plus le même point doit décrire par son mouvement droit pendant le même temps d'une circulation, une ligne égale au rayon AB du cercle de la première circulation ; il s'ensuit que, quelque point de la Spirale que nous prenions, nous aurons la raison du mouvement circulaire du point qui la décrit au mouvement droit du même point, comme de ladite circonférence à la ligne AB, mais aussi les deux directions de ces mouvemens sont données (le commencement de la Spirale & le point où l'on veut la touchante étant donnez) car la direction du mouvement droit est la ligne droite tirée de A jusqu'audit point, & la direction du mouvement circulaire est la perpendiculaire à cette ligne ; ces deux mouvemens sont donc tous deux connus, & par conséquent le mouvement mêlé de ces deux & sa direction, c'est-à-dire, la touchante de l'Hélice en ce point est aussi donnée ; ce qu'il falloit faire.

Ainsi pour tirer la touchante en B, je joins AB, & je tire BE perpendiculaire à AB, laquelle BE je suppose être égale à la circonférence, dont AB est le rayon ; puis ayant mené EF parallèle & égale à AB, la ligne FB touchera l'Hélice au point B. Et quand bien l'on auroit quelque difficulté à concevoir cette méthode, il nous sera toujours facile de montrer qu'elle s'accorde avec les démonstrations des Anciens. Nous avons ainsi démontré que cette façon de trouver les touchantes des sections coniques s'accorde avec celle d'Apollonius, & nous démontrerons ici que notre construction s'accorde avec les propositions d'Archimède : car soit AG perpendiculaire à AB, il est évident que FB prolongée la rencontrera en un point comme G, puisqu'elle rencontre BE sa parallèle par la construction, & partant l'angle AGB

sera égal à l'angle EBF, & ces triangles semblables ; mais le côté AB est égal au côté EF, & partant AG sera égal à BE, c'est-à-dire, à la circonférence du premier cercle de la Spirale, ce qui est vrai par la 18 du livre des Spirales.

De même pour le point C, qui est la fin de la seconde révolution, tirant CH perpendiculaire à AC, & égale à la circonférence dont AC est le rayon, puis tirant HI égale & parallèle à AB, & joignant IC ce sera la touchante : nous démontrerons qu'étant prolongée, elle coupera AGK, prolongée comme en K, & que les triangles IHC, CAK seront semblables : donc comme AC est à HI, ainsi AK sera à CH, c'est-à-dire le double de CH à CH, & partant AK est le double de la circonférence dont AC est le rayon ; ce qui est vrai par la 19 des Spirales.

Pareillement pour avoir la touchante en un autre point de la première révolution, comme en L, je tire AL & je décris la circonférence LOPL coupant AB en O, je prends LM perpendiculaire à AL, & égale à ladite circonférence ; par M je tire MN parallèle à AL, & égale à AB rayon de la première révolution, NL est la touchante, car soit tirée APQ perpendiculaire à AL, par la même raison NL prolongée la rencontrera en un point, comme en Q, & comme AL ou AO est à MN ou AB, ainsi sera AQ à LM, c'est-à-dire à toute la circonférence OPL : mais par la nature & par la description de l'Hélice, comme AO est à AB, ainsi la portion OPL de ladite circonférence est à toute la circonférence, donc la ligne APQ est égale à la portion OPL de la circonférence OPL ; ce qui est aussi démontré dans la 20 proposition des Spirales d'Archimède.

Semblablement pour avoir la touchante en un autre point de la seconde révolution, comme en R, je tire AR

& je décris la circonférence RVXR coupant ABC en V; je prends RS perpendiculaire à AR & égale à cette circonférence, & je tire ST parallèle à AR, & égale à AB; TR est la touchante: car par la même raison ayant tiré AΩ perpendiculaire à RA, la ligne TR prolongée la rencontrera comme en Ω, & comme AR ou AV fera à TS ou AB, ainsi AΩ fera à SR, c'est-à-dire à la circonférence RVXR: mais par la nature de la Spirale, comme AV est à AB, ainsi la circonférence RVXR étant jointe à la circonférence VXR, est à la même circonférence RVXR; & partant AΩ est à la circonférence RVXR, comme la même circonférence RVXR jointe à la circonférence VXR est à RVXR, donc la ligne AΩ est égale à l'aggrégé des deux circonférences RVXR & VXR, ce qui est vrai par la 20 du livre des Spirales d'Archimède.

L'on pouvoit dire d'abord tirez AR, & AXΩ qui lui soit perpendiculaire & égale à l'aggrégé de la circonférence RVXR & de VXR, on aura la touchante ΩR; ou bien ayant tiré AR & ayant décrit la circonférence du centre A & de l'intervale AR, & semblablement RY perpendiculaire à AR, faites que comme AB est à AR, ainsi cette circonférence du cercle soit à RY perpendiculaire, vous aurez le point Y; tirez YZ égale & parallèle à AR, vous aurez le point Z, & ZR sera la touchante.

Mais il a semblé plus claire & plus facile de réduire ces mouvemens à la droite AB & à la circonférence, dont AR est le demi-diametre, & ainsi des autres.

Nous avons supposé qu'on nous donne des lignes droites égales à des circonférences de cercle, ou pour le moins qu'on en entende d'égales, ce qui étant posé nous avons par cette méthode les touchantes de ces lignes, ou pour mieux dire nous démontrons, que concevant

une

une ligne droite égale à une circonférence de cercle, l'on peut par la connoissance des mouvemens composéz concevoir quelle sera la ligne droite qui touchera l'Hélice en un point proposé : nous ferons la même supposition pour la quadratrice.

Exemple neuvième de la Quadratrice.

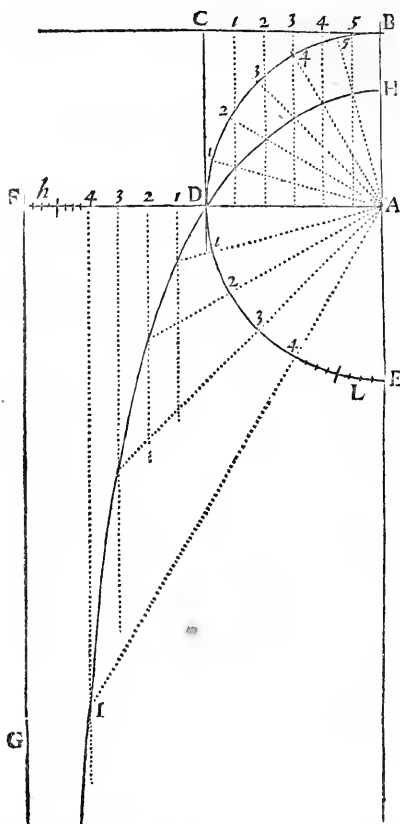
SOIT proposé le quarré ABCD avec son quart de cercle ABD qui lui est inscrit, duquel le centre est A, & le rayon est AB, l'un & l'autre plus grand ou plus petit, suivant que l'on veut décrire la Quadratrice grande ou petite. Soit divisé l'un des côtez du quarré CB ou AD (perpendiculaire à AB rayon du quart) en autant de parties égales qu'on voudra 1 2 3 4 5, &c. & par ces points soit tiré des paralleles à AB jusques au côté opposé; divisez le quart de cercle en autant de parties égales 1 2 3 4 5, &c. à condition que si aux divisions de la ligne BC, vous avez commencé à compter 1, proche de B, vous commencerez aussi à compter au quart de cercle 1, proche de B; mais si vous aviez commencé en C, vous commencerez en D sur le quart de cercle; tirez du centre A des demi-diamètres jusqu'aux points de ces divisions du quart de cercle A 1, A 2, A 3, &c. là où A 1 coupera la première des paralleles, A 2 la seconde, A 3 la troisième, A 4 la quatrième &c. vous aurez les points par où doit passer la portion DH de la Quadratrice de laquelle le sommet H est dans la ligne AB. Voy. la Fig. suiv.

Cette proposition est trop longue & embrouillée.

Nota que Viete *Respons. lib. 8. cap. 8.* appelle le point H *finis Quadratarie*; mais il n'en considère que la portion HD pour la quadrature du cercle.

Pour prolonger cette ligne au-dessous du diamètre AD, ayant achevé le demi-cercle BDE du centre A, dans la droite AD prolongée vers D, je prends DF égale

à AD, laquelle je divise en autant de parties égales que



je juge à propos 1 2 3 4, &c. à commencer proche de D, & par ces points je tire des parallèles au diamètre du cercle BAE, lesquelles je prolonge au-dessous de DF, autant qu'il est nécessaire; puis je divise le quart de cercle DE, en autant de parties égales que j'ai divisé la ligne DF, à commencer aussi en D; par ces points & par le centre A je tire des lignes A 1, A 2, A 3, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent chacune sa parallèle récipro-

que, c'est-à-dire A 1 la première, A 2, la seconde, &c.

& par ces divisions je décris la portion DI de la même Quadratrice prolongée.

Or il est manifeste que cette portion peut être prolongée à l'infini, car ayant pris une très-petite portion Fh de la ligne FD , & une partie proportionnelle EL du quart du cercle, l'une & l'autre étant divisées par la moitié, & ayant tiré les lignes, comme nous avons dit, nous trouverons un point de la quadratrice : mais derechef l'on pourra diviser la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis le $\frac{1}{8}$ &c. partie plus proche de F de la ligne Fh , & la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis le $\frac{1}{8}$ partie plus proche de E de la circonférence LE , & tirer de nouveau des lignes parallèles, & des demi-diamètres prolongez qui se coupent, pour avoir de nouveaux points de la quadratrice ; & puisque l'on peut continuer ces divisions sans fin, l'on trouvera aussi sans fin des points de la quadratrice au-dessous de D & de I ; car pour la finir, il faudroit que la dernière ligne tirée du point F de la ligne ADF parallèle à AE rencontrât son demi-diamètre réciproque, c'est à sçavoir le dernier du quart de cercle DE , c'est-à-dire que FG perpendiculaire à DF en F rencontrât le diamètre BAE prolongé, auquel elle est parallèle ; ce qui est impossible.

Et par là, vous voyez qu'aucun point de la quadratrice ne se rencontrera dans FG , puisque le demi-diamètre réciproque à FG ne la sçauroit jamais rencontrer : elle ne la coupera donc pas quoiqu'elle soit prolongée à l'infini, & néanmoins elle s'en approche toujours de plus en plus, car les points de la quadratrice sont trouvez dans les parallèles à FG que l'on tire par des points toujours plus proches de F que leurs précédentes, & partant la ligne FG est Asymptote de la quadratrice.

L'on peut achever le cercle entier, & continuer la quadratrice de l'autre côté du diamètre BE , avec son Asymptote &c.

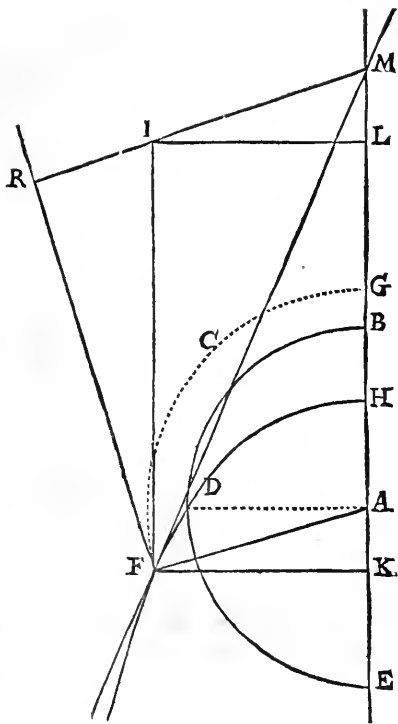
Je ne dis rien ni du nom de la Quadratrice, ni de son usage pour la quadrature du cercle au défaut de Dinostrate ou Nicomede, qui ne se trouvent point. Voyez *I appus lib. 4. Collect. M.* ou *Viete lib. 8. resp. cap. 8.* & *Clavius Geom. pract. lib. 7. in appendice.*

Pour tirer par cette methode les touchantes à la Quadratrice, il faut examiner les mouvemens qui la décrivent. On voit d'abord que le demi-diamètre AD du cercle BDE étant prolongé & tournant circulairement sur le centre A, & la ligne CD se mouvant en même temps parallelement à soi-même, soit qu'elle s'approche de BA, ou qu'elle s'en éloigne suivant que nous faisons tourner le demi-diamètre, ou de D vers B, ou du même D vers E, car tout revient au même, que le point, dis-je, qui décrit la Quadratrice a pour le moins deux mouvemens, l'un droit que la ligne CD lui communique, l'autre circulaire à cause du mouvement du demi-diamètre AD; mais outre ces mouvemens il a encore celui qui l'oblige à se rencontrer dans la commune section des deux lignes AD, CD, ce que nous avons expliqué à la fin de la quatrième proposition de ce Traité où vous trouverez une figure très-semblable à celle-ci. En voici pourtant l'application le plus intelligiblement qu'il m'est possible.

Soit proposé la quadratrice HDF, de laquelle le demi-cercle primitif, donnez-moi ce mot, soit BDE & le centre du demi-cercle soit A, & que l'on demande la touchante de la quadratrice en un point, comme en F. Je prolonge le diamètre BHAE de part & d'autre, puis je tire la ligne AF, qui est celle qui communique le mouvement circulaire au point F; je tire encore par F une parallele au diamètre BE, c'est celle qui communique à nôtre point le mouvement droit duquel la direction est FK parallele à DA & perpendiculaire à AE. Par

F je tire FR perpendiculaire à AF pour la direction du mouvement circulaire. Et ayant supposé que la ligne AF tourne circulairement de D vers B ou de F vers G, du centre A je décris la portion de la circonférence FCG comprise entre

les lignes AF & ABG. Ceci posé je suis obligé d'imaginer que la ligne tirée de F parallèle à ABG se meut de F vers ladite ABG, & par la nature de cette ligne, puisque cette parallèle doit s'ajuster & ne faire qu'une ligne avec AB lors que la ligne AF ayant tourné de F vers LG aura la même position. Si je conçois deux points, l'un F à l'extrémité de ladite parallèle FI, l'autre F au bout de la ligne AF, & que l'un & l'autre de ces points n'ait que le mouvement, le premier de la ligne



IF le long de FK, l'autre celui qui lui fait décrire la circonférence FCG; ou pour mieux dire, puisque la direction de ce mouvement circulaire est FR, je suis assuré que pendant que le premier point aura décrit FK, le second étant porté par la ligne AF que nous imaginons se mouvoir parallèlement à soi-même, & partir du point F (comme nous avons pu faire ci-devant comme en la Spirale &c.) puisque la direction du mouvement circulaire est FR, que ce point, dis-je, aura décrit dans FR prolongé une ligne FR égale à la circonférence FCG.

Mais d'autant que ces deux mouvemens ne sont pas les seuls qu'a le point qui décrit la quadratrice, je ne tire pas du point R une ligne parallèle & égale à FK, pour avoir à son autre bout un point de la touchante, mais j'examine plutôt tous les mouvemens du point F qui décrit la quadratrice en cette sorte.

Je remarque donc premièrement ce que je viens d'expliquer, que le point F doit décrire la ligne FR égale à la circonférence FCG en autant de temps que la ligne FI se mouvant parallèlement à soi-même & uniformément en emploiera jusqu'à ce qu'elle ait la position de la ligne ABG.

Secondement. Faisant donc mouvoir la ligne AF parallèlement & uniformément (puisque FR est la direction du mouvement circulaire du point F, comme nous avons dit) sans considérer le mouvement de la ligne IF, & partant considérant ladite ligne immobile, il est certain que, si nous gardons la condition des mouvemens qui décrivent la quadratrice, qui est que le point F doit toujours être en la commune section des lignes AF, FI, quand l'extrémité immobile de la ligne AF sera en R, le point mobile F se doit rencontrer là ou AF prolongée tant qu'il sera nécessaire, coupe la ligne FI; tirez donc par R la ligne RIM parallèle à AF & coupant FI en I

& le diamètre EBM prolongé en M, vous voyez que le point mobile F se doit rencontrer en I.

Troisièmement. Mais outre ces mouvemens il faut encore considérer que la ligne FI emporte ce point de I vers L où il se devra trouver (ayant tiré IL parallèle à FK, & coupant ABG prolongée en L) lorsque la ligne IF fera une même avec la ligne ABG, c'est à sçavoir lorsque son extrémité immobile F aura décrit la ligne FK, & son point immobile I, la ligne IL. Il est donc certain que si aux mouvemens précédens l'on ajoute celui du point mobile F ou I le long de IL, sans considérer que ce point mobile doit toujours être dans la commune section des lignes AF, IF, le point mobile F se doit trouver en L.

Enfin il faut encore considérer que ce point F a toujours dû être la commune section des lignes AF, FI, & qu'ayant fait mouvoir AF jusqu'à ce que son extrémité immobile ait décrit FR, on lui a donné la position RI, à laquelle elle s'arrête, posé que IF ne doivent se mouvoir que sur FK, & que par cette condition le point étant porté de I vers L, doit décrire la ligne IM au lieu de IL & se rencontrer en M au lieu de L; & partant tous les mouvemens de ce point étant examinés, l'on trouve que pendant que AF s'est promenée le long de FR, & IF le long de FK, le point de leur commune section est arrivé en M; & partant si vous tirez la ligne MF, vous aurez la touchante de la quadratrice en F; ce qu'il falloit faire.

En deux mots, ayant tiré comme ci dessus la ligne FR égale à la circonférence FCG & les lignes FI, RIM, puisque nous considérons un seul mouvement circulaire du point qui décrit la quadratrice, sçavoir celui qu'il a en F, nous le considérons par notre principe, ce que nous avons pratiqué aux lignes précédentes, même en

la Spirale le long de la touchante FR, ce point doit donc monter de F vers R, mais il doit encore être porté vers la ligne AB, à cause du mouvement de la ligne FI, & outre ces deux mouvemens il doit toujours être la commune section des lignes AF, FI, en quelque lieu que nous tirions ces deux lignes, il fera donc dans leur commune section lorsque AF fera en RIM, & IF en ABM, & partant il fera en M. Voici en deux mots une règle générale quadrat.

Un point F de la quadratrice étant donné, & le demi-cercle BDE, par le moyen duquel elle est décrite. Si du centre A de ce demi-cercle & de l'intervale AF, vous décrivez une circonférence FCG depuis F jusques en un point G du diamètre AB, dans lequel se rencontre le sommet H de la quadratrice vers la partie de ce sommet; & si à cette portion de circonférence vous tirez une touchante en F, dans laquelle vous prenez une ligne FR égale à ladite portion de circonférence (d'où il suit que pour tirer la touchante en D, il ne faut que prendre dans AB prolongée depuis A une ligne égale au quart de cercle BD) la commune section du diamètre AB prolongée vers B, & d'une ligne RM tirée par R parallèle à AF, fera dans la touchante de la quadratrice.

Ou sa converse à la façon d'Archimède au livre des Hélices.

Si quadratricem linea recta contigat producatque donec occurrat semi-diametro circuli quadratricis, in qua reperitur quadratricis vertex, etiamsi fuerit opus ad partes verticis producta, & ab ejusmodi puncto sectionis recta linea ducatur parallela ei quæ à centro circuli quadratricis ad punctum contactus in quadratrice ducitur; à puncto vero contactus in quadratrice circumferentia circuli circula quadratricis homocentri portio describatur ad partes verticis

vis quadratricis donec eidem semidiametro etiam productæ occurrat, eique circumferentiæ portioni tangens ducatur ad punctum quod est communis sectio ipsius & quadratricis, occurret ejusmodi tangens circuli ei quæ à communi sectione tangentis quadratricis & diametri productæ ducta fuerat parallela, eritque lineæ circulum tangentis portio inter punctum (quod est communis sectio ipsius & productæ parallele) & quadratricem intercepta æqualis prædictæ portioni circumferentiæ circuli.

Nota, l'on peut rendre la règle plus générale, faisant comme la circonférence FCG est à FK ; ainsi une ligne prise dans FR, même prolongée, plus grande ou plus petite que FR, soit à une ligne plus grande ou plus petite que FK prise dans FK, même prolongée ; mais ne la prenant pas égale, la construction en est plus difficile.

Remarquez deux ou trois choses avant de passer outre. La première, pour plus grande intelligence l'on peut déduire l'application de la seconde partie de la quatrième proposition de ce traité en cette façon.

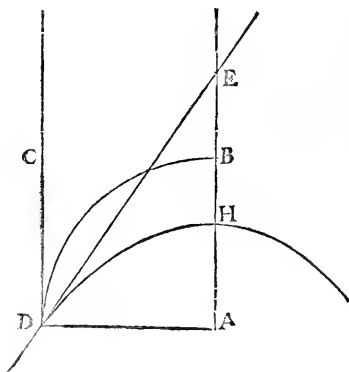
La vitesse du mouvement de la ligne IF, & partant de son extrémité mobile F étant donnée dans FK, elle sera aussi donnée dans FA ; & parce que le point mobile F doit être la commune section des deux IF, FA, la ligne IF ayant la position KAB coupera FA, c'est-à-dire en A ; ce point a donc eû deux mouvemens, l'un de la gauche vers la droite égal à FK, l'autre en montant égal à KA, & ces deux se réduisent à un seul FA : pareillement la vitesse de la ligne AF étant donnée dans FR, son point mobile F devant être la commune section de AF & FI se trouvera en I, & partant il a eû les deux mouvemens FR, RI, qui se réduisent à un seul FI, qui est le troisième côté du triangle FRI.

Ces quatre mouvemens (car nous avons divisé en deux
par. de l'Acad. Tom. VI.

parties celui qui fait que le point mobile F doit être la commune section des deux lignes AF, IF) étant réduits aux deux IF, FA achevez-en le parallélogramme IFAM, la diagonale FM fera la direction du mouvement mêlé de ces deux.

Ceci avoit déjà été expliqué plus brièvement, mais il y a plaisir de considérer une chose par divers biais & en différentes façons.

La seconde; si l'on demandoit la touchante de la qua-



dratrice au point D, où la ligne AD est d'abord perpendiculaire à DC, que puisque le mouvement de AD est donnée dans DC, ou bien AB, & celui de DC est donné aussi d'abord dans DA, & la raison de ces deux mouvements est comme de la ligne DA au quart de cercle

DB, il ne faut que prendre dans AB prolongée autant qu'il le faut une ligne AE, à commencer en A, égale au quart de cercle, & du point E l'on tirera la touchante ED.

L'on eût pu faire trois divers cas pour les touchantes de cette ligne, mais le discours est tout le même voulant tirer la touchante au-dessus de D entre D & H, que lorsqu'on la tire en un point plus éloigné de H & au-dessous de D, comme au premier exemple.

La troisiéme, que *Viete loc. cit.* appelle le point H *finis quadratarie*, & le point D *principium*; mais il ne considère que la portion DH, qui lui sert pour la quadrature du cercle, & puis il s'arrête à la façon de décrire la quadratrice, & il est manifeste que le point D se trouve d'abord, & que décrivant la quadratrice DH à l'ordinaire, le point H se trouve après les autres qui sont entre D & H : mais nous pouvons concevoir le point H tout le premier; & parce que considérant la Quadratrice prolongée des deux côtes, chacun des autres points en a un réciproque de l'autre côté également éloigné de H, & que le point H est le seul qui n'a point de réciproque, nous l'avons appelé le sommet de la Quadratrice.

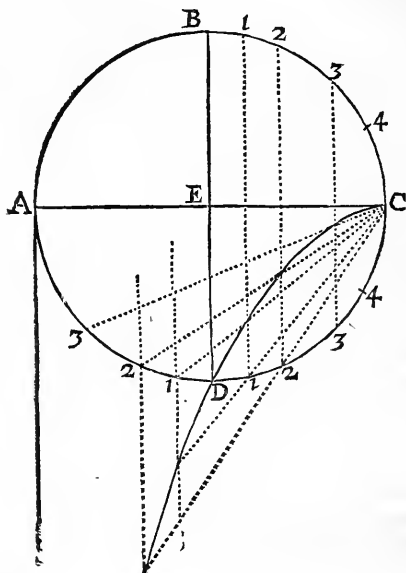
Dixième exemple de la Cissoïde.

SOIT proposé le cercle ABCD, plus grand ou plus petit, suivant qu'on veut décrire la Cissoïde, avec ses deux diamètres à angles droits AC, BD: du point D prenez de part & d'autre des points également distans D₁ & D₁ sur les quarts de cercle DA, DC, puis D₂, D₂, puis D₃, D₃ &c. tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DC des lignes paralleles au diamètre BD, puis du point C joignant les lignes C₁, C₂, C₃, C₄ &c. aux points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DA, là où C₁ coupera la parallele 1 1, & C₂ la parallele 2 2, & C₃ la parallele 3 3, & C₄ la parallele 4 4, vous aurez des points par lesquels la Cissoïde est décrite.

Que si vous voulez prolonger la Cissoïde CD en dehors du cercle, tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart du cercle DA des lignes paralleles au diamètre BD, & prolongez-les tant qu'il faudra en dehors du cercle du côté de D, puis par les points réciproques 1, 2, 3, 4 du quart de cercle DC, tirez du point C d'autres lignes oc-

cultes C_1, C_2, C_3, C_4 , & prolonge-les autant qu'il le faudra hors le cercle, les points où chacune de ces lignes coupera sa réciproque, sçavoir C_1 , la parallèle 11 ; C_2 la parallèle 22 &c. ces points feront dans la Cissoïde prolongée.

Par un discours semblable à celui dont nous nous som-



mes fervis pour la quadratrice, l'on montrera que cette ligne peut être prolongée infiniment, & qu'elle ne rencontrera jamais une ligne droite infinie tirée du point A parallèle au diamètre BD, ou si vous aimez

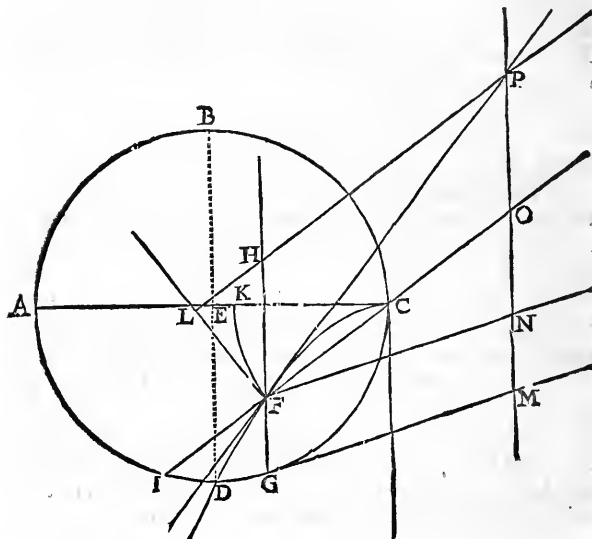
intérieurs la touchante du cercle de la Cissoïde au point A. Et parce que la Cissoïde peut être continuée de l'autre côté par le moyen d'un autre cercle égal à ABCD, & décrit sur son diamètre AC prolongé vers C, en sorte que ces deux cercles se touchent en C, il nous sera permis d'appeler le point C, le sommet de la Cissoïde, puisque c'est l'unique dans la Cissoïde, qui n'en a point de réciproque, ou si vous voulez de semblable : car les points de la Cissoïde prolongée plus loin que D, à l'égard de C peuvent être appelés réciproques des points de la portion DC de la Cissoïde. Ce qui est assez clair par la méthode de trouver ces points.

Ceci posé, il faut examiner les mouvemens particuliers du point qui décrit la Cissoïde, pour en donner les touchantes.

Il faut donc remarquer d'abord, que si vous faites tourner la ligne CD circulairement au tour du point C, en sorte qu'elle passe successivement par C₁, C₂, C₃ &c. de D vers A, prenant les points 1 2 3 4 dans le quart de cercle DA, & qu'en même temps le diamètre BD soit porté parallèlement à soi-même vers C, mais en montant de telle façon que son extrémité D décrive le quart de cercle DC d'un mouvement égal & uniforme, & que lorsque la ligne CD aura la position CA, le diamètre BD ait la position de la touchante du cercle en C, c'est-à-dire de l'axe de la Cissoïde, le point qui aura toujours été dans la commune section de ces deux lignes aura décrit la portion DC de la Cissoïde. Ceci posé.

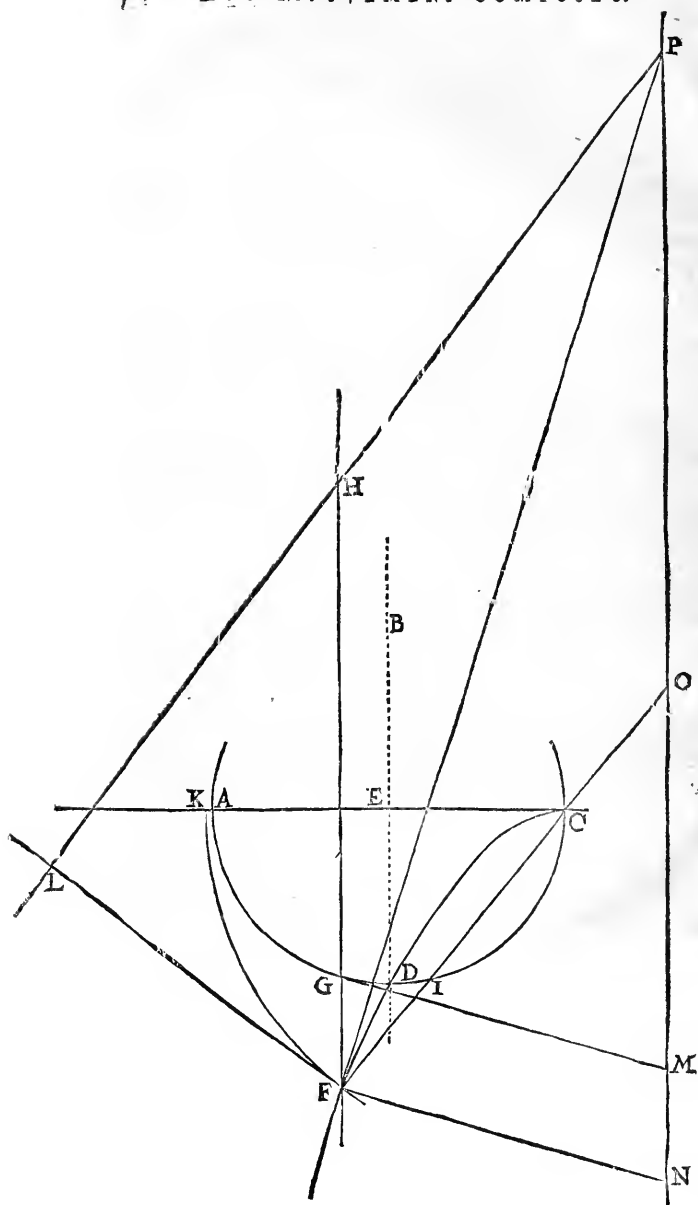
Soit proposé le point F de la Cissoïde lequel soit pris dans cette figure entre les points C & D; mais dans la suivante il sera plus éloigné du sommet, & au-dessous de D à l'égard de C, tirez la ligne FG parallèle au diamètre BD, coupant le cercle en G en sa partie inférieure dans le quart de cercle DC en cette première figure, & prolongez

gez-la du côté de F vers H, puis tirez la ligne CF; & prolongez-la jusqu'à la circonférence du cercle en I, (dans la seconde figure elle coupe le cercle avant que d'arriver en F) vous voyez donc que la ligne CFI en tournant autour du centre C jusqu'à ce qu'elle ait passé par toutes les positions des lignes tirées du point C à tous les points de la circonférence IA jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position CA, dans ce même temps la ligne



FG s'étant mûë, comme nous avons expliqué, parallèlement à soi-même vers C, en sorte que son point G ait décrit la circonférence GC du cercle de la Cissoïde, sera arrivée en C, & aura la position de la touchante du cercle de la Cissoïde au point C.

Mais pendant le mouvement circulaire de la ligne CF vers A, si vous décrivez du centre C & de l'intervalle CF un arc de cercle FK compris entre CF & CA & coupant CA en K, il se trouve que le point F de la ligne CF porté par le seul mouvement de la ligne CF, ce point, dis-je, a décrit l'arc FK, il a donc décrit l'arc FK en même temps que le point G porté par le mouvement que nous avons expliqué de la ligne FG, a décrit la circonférence GC, mais chaque point de la ligne FG décrit une ligne égale & semblable à celle que décrit le point G, & partant le point F de la ligne FG porté par cette ligne décrit une circonférence égale à GC : vous voyez donc que ne considérant que les deux mouvemens du point F, que les deux lignes CF, FG lui donnent sans considérer que ce point doit toujours être en leur commune section par le mouvement de la ligne CF, il aura décrit la circonférence FK en même temps que la ligne FG lui aura fait décrire une circonférence égale & parallèle à GC, & partant que ces deux mouvemens sont proportionnez, comme les circonférences FK & GC, mais les directions de ces deux mouvemens sont l'une FL touchante de l'arc FK, & perpendiculaire à CF; l'autre est FN parallèle à GM, qui touche le cercle de la Cissoïde en G (car puis que la circonférence que le point F décrit est parallèle à celle que décrit le point G, & puisque les points GF sont dans la même ligne droite, les touchantes sont parallèles) & partant si vous faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, ou comme le demi-diamètre CF de l'arc FK, au diamètre entier CA, de l'arc GC, ainsi FL soit à FN, vous aurez les raisons de ces mouvemens dans leurs lignes de direction : ceci posé vous ne composez pas un mouvement de deux seuls FL, FN, car vous vous souvenez qu'outre ces deux mouvemens le point mobile F doit encore être toujours la commune section des lignes



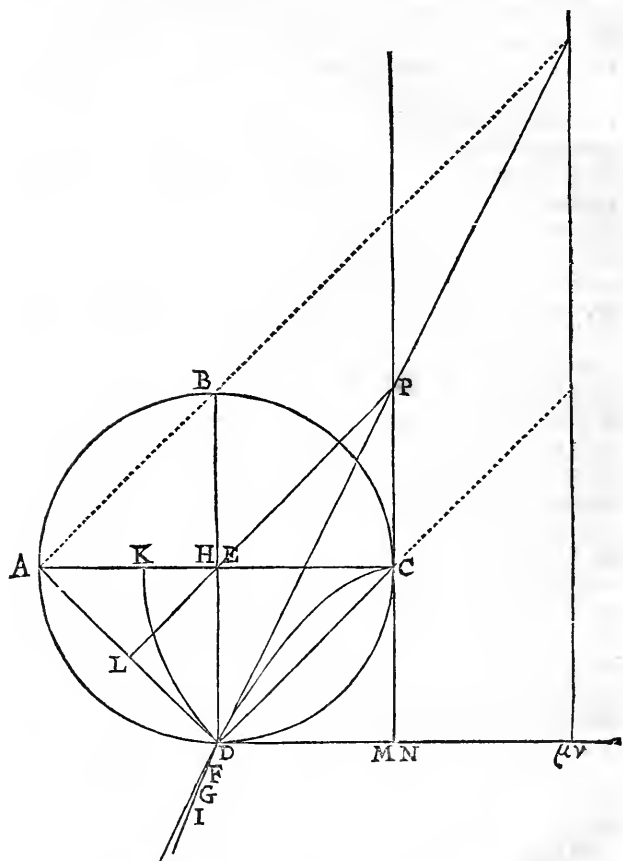
CF, FGH. Voici cette construction d'une autre façon.

Etant donné le cercle de la Cissoïde ABCD, son centre E, la Cissoïde CDF &c. comme nous avons expliqué, & qu'il faille en trouver la touchante en un point comme F. Par le point F tirez FGH ou GFH parallèle au diamètre BD, coupant le demi-cercle ADC en G, & prolongez-la vers le côté du diamètre AC, comme en H; du sommet C de la Cissoïde tirez la ligne CFI en la première figure ou CIF en la seconde coupant le demi-cercle ADC en I; du centre C & de l'intervalle CF décrivez l'arc de cercle FK vers le diamètre CA coupant le diamètre même prolongé vers A s'il en est besoin en K, tirez FL touchante de cette circonférence vers le diamètre AC, du point G tirez aussi GM touchante du cercle de la Cissoïde, & par le point F menez FN parallèle à GM, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard du point A, faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, c'est-à-dire comme la ligne CF est à CA, ainsi FL dans la première touchante, & prise si vous voulez *ad libitum*, soit à FN; par L tirez LHP parallèle à FC, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard de F, puis par N tirez NOP parallèle au diamètre BD, & prolongez-la jusqu'à ce qu'elle rencontre LHP, comme en P, de ce point tirez la ligne PF, ce sera la touchante de la Cissoïde.

Dans cette construction nous ne faisons point mention des points H & O, ni du parallélogramme HFOP, quoi-qu'il eût été besoin d'en parler auparavant pour examiner tous les mouvemens du point F de la Cissoïde: l'on eût pu faire le même dans la quadratrice, où la seule intersection des lignes RIM & ABM, nous eût donné le point M, sans considérer le parallélogramme IFAM &c.

L'on pourroit ajouter des démonstrations Géométriques à ces constructions, pour prouver tous ces points de rencontre mais cela seroit un peu long.

Voyez la
figure de la
Quadratrice.



biais que nous les avons considérez dans la quadratrice ;

& énoncer ce Théoreme, que si d'un point P de la touchante FP, l'on tire PL parallele à CF coupant FL en L, & PN parallele à BD coupant FN en N, & dire que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à FN, ce qui est facile.

Il suffira avant de passer outre, de dire quelque chose de la touchante de la Cissoïde au point D, dont voici la figure sur laquelle je remarque :

Premièrement, que faisant trois cas pour les touchantes des cette ligne, l'un pour le point D, le second pour les points d'entre C & D, & le troisième pour les points au-dessous de D (car la touchante au point C est le diamètre AC; & généralement en toutes les lignes courbes qui ont un axe, leurs touchantes au sommet sont perpendiculaires à cet axe;) l'on auroit pû mettre celui-ci le premier, n'eût été qu'il falloit expliquer plus généralement & sans confusion les mouvemens du point F : or en cette figure les points DFGI ne sont qu'un même, le point H peut être le même que le point E ou que le point B, comme en la seconde construction de cette figure, que nous avons marquée par des lignes ponctuées & avec des lettres Greques, & les points MN, ou ~~mu~~ sont un même point.

Secondement, sans supposer dans FL ou GM des lignes égales aux arcs FK & GC, l'on fait par une construction Géométrique, que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à GM en cette façon.

Puisque l'angle ACD est à la circonférence de l'arc AD, & au centre de l'arc FK, il s'ensuit que l'arc AD ou DC est double en ressemblance à FK, & partant que comme le demi-diamètre EC est au demi-diamètre CD ou DA, ainsi l'arc DC est au double de l'arc DK, & par conséquent que comme EC est à la moitié de DC ou de DA, ainsi l'arc CD est à l'arc FK : prenant donc DM égale à EC, & FL égale à la moitié de FA ou de DA,

l'on aura fait cette construction Géométrique , & la parallèle à CF passera de L par le centre E ; ou encore prenez d'un côté la route DA , & de l'autre G μ double de DM , la parallèle à CF fera AB &c.

*Onzième exemple , de la Roulette ou Trochoïde
de M. de Roberval.*

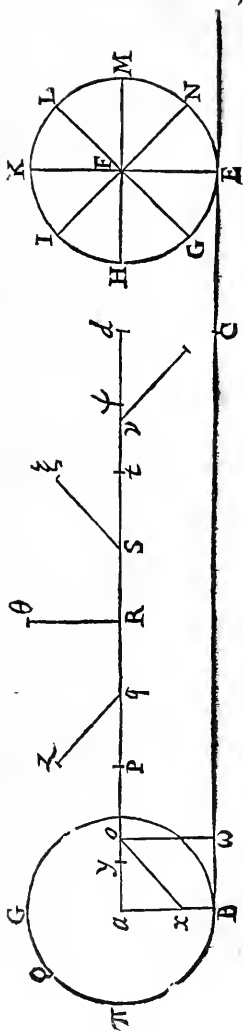
SOIT proposé le cercle duquel le centre est a , le demi-diamètre aB , & sa touchante BC au point B prolongée en C, l'on imagine que le cercle aB faisant une révolution sur la ligne BC, soit que BC soit égale à la circonférence du cercle, soit qu'elle soit plus grande ou plus petite (ce que je suppose indifférent, & facile à démontrer) le point B de ce cercle étant porté par les deux mouvemens, l'un droit qui le porte de B vers C, l'autre circulaire à cause de la révolution du cercle ; que ce point, dis-je, décrit la Roulette ou Trochoïde ; ou si vous voulez, ayant tiré par le centre a la ligne ad égale & parallèle à BC vers le même côté, l'on imagine que le cercle glissant de B vers C sans tourner à l'entour de son axe, en sorte que le centre a décrive la ligne ad par un mouvement uniforme, en même temps le point B décrive la circonférence de son cercle passant de B par π QGB d'un mouvement uniforme, & que le centre a étant arrivé en d , ce point se retrouve en C, où la ligne BC touche le cercle, & qu'enfin ces deux mouvemens, l'un circulaire, par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de son cercle, l'autre droit, par lequel il est emporté vers C, mêlez comme nous avons dit, étant tous deux uniformes, font décrire la Roulette à ce point B.

D'où vous voyez que ces deux mouvemens étant uniformes, le point B peut décrire trois diverses sortes de

Roulettes, suivant que son mouvement circulaire sera proportionné à son mouvement droit, ou si vous voulez suivant la raison de la circonférence de son cercle à la ligne ad , que le centre décrit, puisque cette circonférence peut être ou égale à la ligne ad , ou plus grande ou plus petite.

Nous ne nous arrêtons pas à considérer les lignes qui peuvent être décrites, posé que l'un ou l'autre de ces mouvemens, ou même posé que ni l'un, ni l'autre ne fut uniforme.

Ceci posé, pour décrire aisément cette ligne, soit prolongée la ligne BC , comme en E ; du point E soit tiré EF égale & parallèle à aB ; du centre F décrivez le cercle $EGHIKLMN$, qui sera égal au premier, divisez sa circonférence en tant de parties que vous voudrez par les points $GHIKLMN$, & tirez par ces points les demi-diamètres du cercle. Divisez la ligne ad en autant de parties égales que vous avez divisé la circonférence GHI &c. aux points $oPqRStu$, par le point o tirez ox égale



& parallèle au rayon FG, par P tirez Pp égale & parallèle à FH, puis qz égale & parallèle à FI, & ainsi des autres, vous aurez les points BxyzθξψC, par lesquels la Roulette doit être décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne ad un des points de sa division comme par exemple le premier o , & tirez oo perpendiculaire sur BC, & par conséquent parallèle aux rayons aB , FE, mais par la description ox est parallèle à FG, & partant l'angle xoo est égale à l'angle GFE, & décrivant du centre o & de l'intervalle ox , l'arc xo , cet arc est égal à l'arc GE: mais posé que le centre a ait décrit la ligne ao , & soit en o , le point B doit avoir décrit un arc égal à EG; car par l'hypothèse EG est à sa circonférence totale, comme ao est à ad , & les mouvemens sont uniformes; donc le point B a décrit l'arc ox , il est donc en x , & par conséquent le point x est un point de la Roulette; ce qu'il falloit démontrer. L'on démontrera la même chose de tous les autres points.

Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle GHIKLMN d'un autre centre pris dans la ligne ad , comme du centre o , P, R &c. & faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mêmes points de la Roulette.

Ces connoissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvemens composez; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit & de son mouvement circulaire; si l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne BC ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.

Car soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est ADC, le sommet B & l'axe BD, & que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, soit autour de l'axe BD, soit sur quelque diamètre perpendiculaire à la ligne ADC; du point E tirez la ligne EF parallèle à AC, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, si le point E étant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire &c.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC est à la circonférence du cercle, ainsi EF soit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce sera la touchante de la Roulette.

M. de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne EF, comme ci-dessus. Tirez encore une ligne FB, & par le point E tirez EH parallèle à FB, la ligne EH fera la touchante.

Or il est facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la première, mais elle n'est pas si générale n'étant proposée qu'au cas que la Roulette, soit du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonstration que nous chercherons analytiquement, comme il s'ensuit.

Il faut démontrer qu'ayant tiré comme ci-dessus la ligne EF & FG touchante du cercle au point F, & ayant pris FH dans FG égale à EF; si l'on tire deux lignes l'une HE, l'autre FB, elles seront parallèles.

Pour le prouver, tirez IK parallèle à FH jusqu'à ce qu'elle rencontre au point K la ligne FBK prolongée vers B; prolongez encore la ligne EFIL jusqu'à l'autre côté du cercle en L, & tirez la ligne BL, & supposons que les lignes FB, EH sont parallèles; donc l'angle

EHF est égale à l'angle FKI : mais par la construction l'angle HEF est égal à l'angle EHF , parce que nous avons pris FH égale à EF ; il faut donc montrer que l'angle KFI est égal à l'angle FKI ; mais l'angle FKI est égal à GFK par la construction , ayant tiré IK parallèle à FG , il faut donc prouver que l'angle KFI est égal à l'angle GFK , mais GFK est égal à l'angle BLF , dans la section alterne ; il faut donc prouver que KFI est égal à BLF ; ce qui est certain.

En retournant , l'angle KFI est à BLF , mais BLF dans la section alterne est égal à l'angle GFK , donc KFI est égale à l'angle GFK : mais à cause des parallèles FG , IK , l'angle GFK est égal à FKI , donc KFI & FKI sont égaux , & le triangle FIK est isoscele ; mais le triangle EFH est aussi isoscele par la construction le triangle EFH est donc semblable à FIK , & l'angle HEF est égal à l'angle KFI , d'où il s'ensuit que la ligne EH est parallèle à FBK ; ce qu'il falloit démontrer.

Dans la figure précédente ayant fait décrire le cercle de la Roulette autour de son axe , & tiré la touchante FH , ç'a été toute la même chose , comme si ayant fait tirer le cercle de la Roulette en la position qu'il doit être lorsque le point A du cercle est arrivé en E , nous lui eussions tiré sa touchante par le point E , car ces positions de cercles étant parallèles , & le point E étant aussi élevé sur la base AC , que le point F , les touchantes des cercles sont parallèles , & partant l'une peut servir aussi-bien que l'autre , pour en mêler un mouvement droit , puisque l'une & l'autre rencontre la ligne EF , qui est la direction de ce mouvement droit. C'est pourquoi si l'on vouloit décrire le cercle de la Roulette en la position qu'il est lorsque le point qui la décrit est arrivé en E , ayant premièrement décrit le cercle BFD autour de l'axe BD , & tiré la ligne EFI parallèle à ADC , prenez EM

dans EF égale à FI , qui est comprise entre la circonférence & le diamètre du cercle qui est perpendiculaire à la base AC , vous aurez le point M par où doit passer ce diamètre perpendiculaire. Et partant si vous tirez MN perpendiculaire à AC , & si vous la prolongez vers M en O en sorte que NMO soit égale au diamètre du cercle de la Roulette, vous aurez le diamètre dudit cercle en la position requise; ce qui est facile.

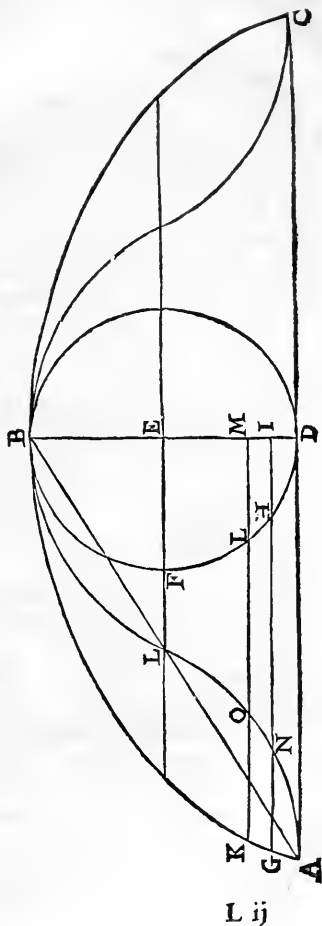
Je ne vous dirai rien des propriétés de la Roulette, comme que la ligne droite EF est à l'arc FB , en même raison que la base AC à toute la circonférence du cercle &c. M. de Roberval ne m'a pas encore fait voir le Traité qu'il en a fait, où après en avoir démontré cette propriété & un grand nombre d'autres, il compare ces lignes les unes aux autres, les semblables, celles de divers genres, les égales, les inégales, leurs ordonnées, leurs espaces &c. ce qu'il a expliqué dans un si bel ordre, qu'il m'a dit que son Traité étoit aussi limé comme s'il eût été sur le point de le faire imprimer.

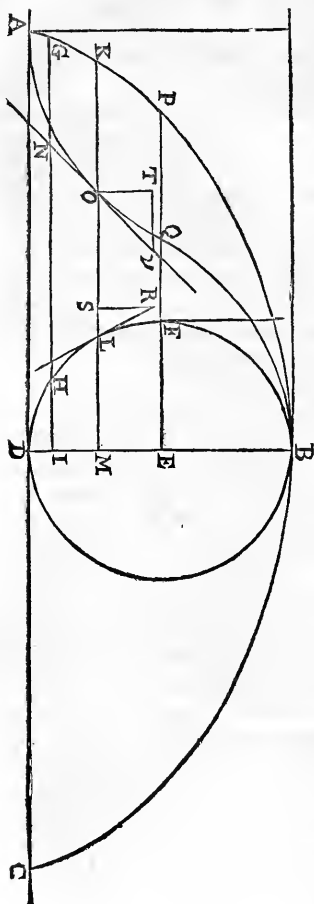
Douzième exemple, de la compagne de la Roulette.

C'EST ainsi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, & qui en a imaginé l'hypothèse & la description en cette sorte.

Soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est AC l'axe BD , le centre du cercle dans l'axe est E , & le cercle de la Roulette BFD à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette est décrite par la seconde façon qui en a été donnée dans l'exemple précédent; c'est à sçavoir que pendant que le cercle de la Roulette glisse depuis A jusques en C , en sorte que son centre E décrit d'un mouvement uniforme une ligne parallèle & égale à AC , en même temps le point mobile A parcourt part un mouve-

ment uniforme la circonférence de ce cercle, & décrit la Roulette par le mouvement composé de ces deux ; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainsi la circonférence DFB, un autre point A ou D mobile dans le diamètre du cercle, qui est toujours perpendiculaire à AC, monte le long de ce diamètre de D vers B d'un mouvement inégal, enforte qu'il soit toujours également élevé sur la base AC, comme est le point qui décrit la Roulette, c'est-à-dire qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne GHI coupant la circonférence du cercle en H & l'axe en I, lorsque le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, c'est-à-dire en H, dans le cercle, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.





De même tirant par un autre point K la parallèle à la base KLM, qui coupe la circonférence BLHD en L & le diamètre BD en M, lorsque le point de la Roulette est en K, c'est-à-dire dans le cercle en tel endroit qu'en L, le point de la compagne de la Roulette est dans BD en tel endroit que M, & ainsi des autres.

D'où il s'en suit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes parallèles à AC, si dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la même ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle & son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit, la ligne GHI, si dans la même

ligne vous prenez GN égale à HI, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde; de même prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous aurez un autre point O de la même ligne. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire à BD, & si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette; ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF dans la même ligne PF, vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-ci, & auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux ci-après. Or ç'a été la même chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de lui donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne AC, ce qui a déjà été remarqué dans la Roulette.

Ceci posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-ci est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégal, & desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes AD, BD ou dans leurs parallèles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-ci monte de la même façon que celui qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, & composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvemens droits, l'un parallèle à AD & l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallèle à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point; & sçachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme & égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme, & égal à ladite circonférence, si l'on fait que comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallèle à AC du point de cette ligne-ci qui

est réciproque à celui du cercle auquel l'on a tiré la touchante.

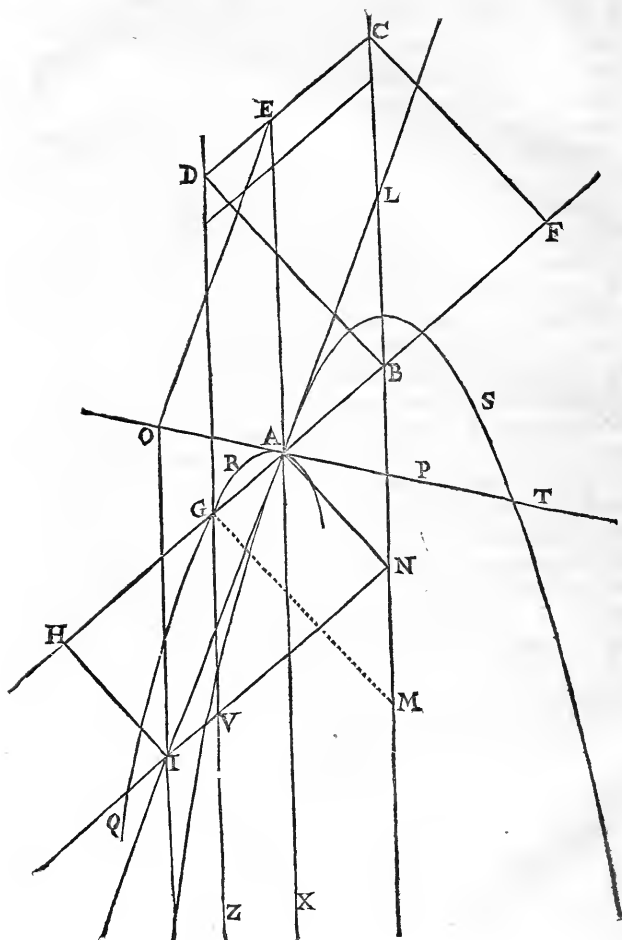
Par exemple, soit en la dernière figure ci-dessus la Roulette ABC du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle & le reste, comme il a été dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L réciproque du point O, la touchante du cercle LR, & je compose le mouvement LR de deux RS, SL, dont l'un RS est parallèle à BD; puis comparant les mouvemens du point O à ceux du point L, puisque par la supposition le point O monte autant que le point L, je tire OT parallèle & égale à RS, ce sera la direction & la quantité de ce premier mouvement du point O; puis après parce que le point O a dans une ligne parallèle à AC un mouvement égal à celui du point L le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celui du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallèle à AC, & égale à LR, j'aurai les directions & la raison des deux mouvemens du point O, & partant la ligne OV fera la touchante de cette ligne au point O; ce qu'il falloit faire.

Treizième exemple, de la Parabole de M. des Cartes;

MONSIEUR des Cartes nous apprend le moyen de décrire en deux façons cette ligne courbe, qui est une espèce de Parabole : la première par sa règle composée qui est la 318 page de sa Méthode, & la deuxième en la page 405 de la même Méthode, ou bien 337, qui est en faisant mouvoir une Parabole ordinaire avec son plan le long de son diamètre MC, & prenant un point fixe comme G hors le même diamètre, mais dans un autre plan fixe sur lequel le plan de la Parabole se

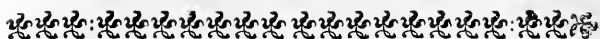
meuve en coulant , ces deux plans convenans toujours l'un à l'autre pendant le mouvement de celui de la Parabole : puis dans le diamètre BC soit marqué un point B , qui ne se puisse mouvoir qu'au mouvement de la Parabole , demeurant toujours à pareille distance du sommet ; & soit entendu une ligne droite GB indéfinie , qui tourne à l'entour du point fixe G comme centre , & qui passe toujours par B pendant que la Parabole se meut , cette ligne GB coupant la Parabole mobile continuellement en de nouveaux points , la ligne courbe qui passera par tous ces points sera la Parabole de M. des Cartes , laquelle à proprement parler est une Conchoïde de Parabole , & peut-être double , car la ligne GB peut couper la Parabole proposée en deux points.

Pour avoir la tangente de ladite ligne courbe , par exemple en A , tirons premièrement deux lignes parallèles au diamètre de la Parabole TSV , que nous faisons mouvoir sur la ligne droite MC , desquelles parallèles l'une DGZ passe au point G , qui est comme le Pole , & l'autre parallèle EAX passe au point A auquel nous voulons la touchante ; ensuite examinons premièrement le mouvement du mobile au point B , ledit mobile étant porté sur la ligne GBF , laquelle se meut circulairement sur le point fixe G en tirant vers les points DC , duquel mobile au point B nous avons la direction , à sçavoir BC , parce que par la description de la ligne courbe QRA , ledit mobile se maintient toujours dans la ligne MC : nous avons aussi les deux autres directions desquelles est composée BC , l'une la circulaire DB , la ligne DB étant perpendiculaire sur GB , & l'autre direction la ligne droite BF , nous aurons donc ces directions , & les raisons des vitesses dudit mobile au point B : or les points qui sont dans la Parabole mobile montant tous également , si nous
menons



menons du point C une parallèle à BG, sçavoir CD, les lignes DG, EA & BC seront égales, & par conséquent EA & DG seront les mêmes directions que BC; ensuite examinons le mouvement du point A, auquel nous voulons avoir la touchante; & considérons le point B comme étant fixe & arrêté, autour duquel se meuve circulairement la même ligne BG vers VMT, car c'est le même mouvement circulaire que le précédent; donc l'une de ces directions, à sçavoir la circulaire, sera AN; & les angles DGB & GBM étant égaux, en même temps que le point B ira en D, aussi le point G ira en M, & A en N, les lignes GM & AN étant parallèles à BD; donc la direction circulaire du point A sera AN; mais le même point A se maintenant toujours dans la Parabole TSV, sa direction sera la touchante de la même Parabole TSV. Soit donc menée cette touchante, à sçavoir IL, & achevé le parallélogramme AHIN, nous avons donc AI pour direction de ce point A se mouvant circulairement, & se maintenant aussi dans la Parabole STV, nous avons aussi la direction du même point A se maintenant dans MG, à sçavoir AE égale à BC, & par conséquent le parallélogramme EOIA étant achevé, la ligne droite OA diagonale du parallélogramme sera la direction du point A, & par conséquent la touchante de la ligne courbe QGRA audit point A; ce qu'il falloit faire.





P R O J E T

D'UN LIVRE DE ME'CANIQUE
traitant des Mouuemens composez.

PAR un mouvement composé j'entens celui qui se fait de deux ou plusieurs mouvemens différens entr'eux, soit par leurs directions ou leurs vîtesces, ou par toutes les deux, lorsque tous ces mouvemens sont communiquez à un même mobile, ou en même temps, ou successivement, soit que la communication s'en fasse en un instant, ou avec du temps.

On peut considérer le mouvement composé en trois états différens; sçavoir, ou dans ses causes, ou en soi-même pendant sa durée, ou dans ses effets.

Les causes d'un mouvement en tant que composé sont les mouvemens particuliers qui le composent, qui sont ou simples, ou composez eux-mêmes.

Ici on discourra des causes des mouvemens simples qui sont les principes actifs de la nature dans ses corps différens, soit qu'ils agissent par des causes ordinaires & réglées comme par la pesanteur, ou légèreté, & par de pareilles qui nous paroissent uniformes ou à peu près, soit que ces causes, quoiqu'ordinaires, ne soient pas réglées, comme l'action du feu, celle des ressorts, celle des animaux &c. Ce qu'on amplifiera par les exemples des feux artificiels, par la poudre à canon, ou autrement par les arcs, les arquebuses à vent, & les autres actions de l'air. On y ajoutera les mouvemens particuliers du soleil & des étoiles; on y fera entrer l'artifice des

hommes , qui par leurs propres forces , & par celles tant des animaux que des autres corps naturels , peuvent faire des mouvemens composez , d'autant plus diversifiez qu'ils ont de connoissance & d'industrie.

La nature en général possède les principes des mouvemens simples , dont il s'en compose une infinité d'autres dans les animaux , végétaux , minéraux &c.

Quoiqu'on connoisse les mouvemens simples qui en font un compose , il n'est pas toujours facile de connoître ce compose , ni les lignes qu'il décrit par sa composition , particulièrement quand elles sont courbes , comme il arrive d'ordinaire. De là vient cette science spéculative qui tient beaucoup de la Géométrie , & qui traite des lignes & des figures décrites par les mouvemens composez ; de leurs tangentes & de leurs autres propriétés.

Le mouvement compose considéré en soi n'est point différent d'un mouvement simple ; & on le peut considérer comme simple , quand il est connu , de même que s'il étoit produit dans la nature par sa simplicité ; même on peut considérer non-seulement un mouvement compose ; mais aussi un mouvement simple droit ou courbe , comme étant compose de plusieurs autres , tant simples que composez ; ce qui sert souvent pour la découverte de plusieurs belles vérités touchant la nature & les propriétés des lignes & des figures , qu'on ne découvreroit pas si facilement sans cette considération , quoique souvent elle ne soit qu'une fiction , mais pourtant une fiction d'une chose possible.

Il est remarquable que quand un mouvement compose se présenteroit à nous , si nous ne savons point qui sont ceux qui l'ont compose , quand même nous saurions qu'il n'est pas simple , nous ne saurions pourtant découvrir avec certitude qui sont les composants. La principale raison de ce défaut vient de ce que

tout mouvement peut être composé de plusieurs sortes, & même d'une infinité de sortes, entre lesquelles il seroit difficile, pour ne pas dire impossible, de rencontrer la véritable.

Touchant les effets du mouvement composé, ils ne sont remarquables qu'au même temps qu'il se compose; car après qu'il est composé, ses effets ne sont plus différens de ceux d'un mouvement simple.

En général ces effets sont de changer de vitesse, ou de direction, ou de toutes les deux, sans compter que de deux ou de plusieurs mouvemens actuels il se peut composer un repos.

Mais en particulier, ou ils sont des lignes différentes, ou des figures différentes, ou ils changent des temps égaux en des inégaux, ou au contraire, & partant quelquefois ils réglent, quelquefois ils dérèglent; ils établissent, ils détruisent, & ainsi d'une infinité d'actions causées dans toute la nature par une telle composition.

Mais il ne sera pas hors de propos d'apporter ici pour exemple quelques-uns de ces effets particuliers, pour porter les esprits à la considération d'une infinité d'autres.

Les carosses courant vite, & voulant tourner trop court, versent. Il en est de même de ceux qui sautent hors d'un carosse qui court.

De l'effet des lances, qui rompent, qui faussent, ou qui glissent sur les cuirasses.

Des balles de mousquet, de pistolet &c. sur des corps mobiles, tant sur ceux qui les repoussent que sur ceux qui les laissent entrer plus ou moins, ou qui écrasent la balle; du coup oblique qui est une espèce de mouvement composé, même sur un corps immobile. On citera les sillons des balles & des boulets sur la terre & sur l'eau, & on examinera si la réfraction ne feroit pas un pareil effet.

Les montres & les horloges se dérèglent dans le transport, & les pendules y font des plus sujettes.

Les pierres & quelques boulets de fer rougis au feu s'en vont en pièces au sortir des canons.

Le choc de l'air, de l'eau & des corps terrestres font des compositions de mouvemens suprenans & souvent dangereux, tant sur la terre que sur la mer.



DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

ÆQUATIONEM recognoscere, est statum illius examinare, eo fine ut innotescat ejus constitutio hinc ab origine ejusdem, usque ad ultimam ordinationem: atque un nota fiat laterum datorum, ad ea quæ quaruntur habitudo; item ut dignosci possit, an de unico lare ignoto explicabilis sit ipsa æquatio, an vero de pluribus, & quot; atque utrum aliqua ex ipsis sint æqualia, an vero omnia inæqualia. Rursus sintne latera quæsitæ positiva, seu realia, seu etiam possibilia: an contra ficta, seu nulla, seu etiam impossibilia. Quæ omnia ut melius intelligi possint, præmittenda sunt quædam, tum circa vocabulorum ac notarum, seu signorum explicationem, tum etiam circa ordinem, quem in ordinando hoc opere sequi decrevimus;

Ac primum, quod ad vocabula, notas, seu signa spectat, sive de lateribus sit quæstio, sive de potentiis eorundem laterum, quædam agnoscimus quæ suâ naturâ aliquid inducant supra nihilum; quædam verò quæ suâ naturâ aliquid indicant infra, dicantur omnia tum hæc, tum illa positiva; priora quidem positiva supra, posteriora autem positiva infra.

Rursus tam positiva, supra quam positiva infra, vel affirmativa sunt, vel negativa; sed affirmativa supra æquivalent negativis infra, & è contrario. Et quidem, signum affirmationis tam supra quàm infra, est hoc vulgò receptum $+$. Signum negationis tam supra quàm

infra, est hoc aliud vulgò quoque receptum —. Signum differentiae inter duas magnitudines, est ejusmodi $=$. Quo ambiguum relinquitur quænam ex duabus magnitudinibus propositis, inter quas tale signum intercedit, major est aut minor. Signum æqualitatis tale est \propto ; quo significatur magnitudines inter quas illud intercedit, esse æquales; sive una magnitudo uni magnitudini æquetur; sive una pluribus; sive plures uni; sive denique plures pluribus.

Operæpretium fuisset si quæ suâ naturâ habentur infra magnitudines, certo aliquo signo ab aliis distincto notatæ essent: verùm quia passim, immò ferè semper accidit ut in eadem quæstione, sub iisdem terminis, magnitudines quæsitæ sint, supra vel infra, ex natura ipsius quæstionis, ac vi æquationis ad ipsam pertinentis; ideo talis distinctio commodè fieri non potuit fiet tamen ut notâ ejusmodi æquationis constitutione, innotescat etiam natura ipsorum laterum, & quicquid ad numerum eorumdem determinandum requiritur, ut magis patebit in sequentibus.

Præterea omnis multiplicator nihilho æquivalens multiplicans quodvis multiplicatum (seu illud multiplicatum nihilho æquivalca, seu aliquid supra, aut infra indicet) producit nihilho æquivalens. Idem accidit, sive multiplicator nihilho æquivalet, sive aliquid indicet supra aut infra, dummodo multiplicatum æquivalet nihilho.

Idem prorsus intelligendum de divisione, quod de multiplicatione; divisor enim hic gerit vices multiplicatoris, quotiens multiplicati, & divisum producti; quandoquidem multiplicatio restituit divisionem, & divisio multiplicationem. Hæc de notis seu signis, nunc de ordine dicamus.

Multis quidem modis ordinari potest æquatio, præ-

cipue si multipliciter affecta sit; & revera à diversis authoribus diversimodè constitutus est ordo ipse, nobis accommodatissimus ille videtur qui omnia quibus æquatio constat homogenea ex una parte constituit; sic ut omnia simul nihilo æquivalent, quod quidem nullo negotio semper efficitur; illud autem vel unico exemplo pernum fiet. Proponatur methodo Vietae hæc æquatio — $BA^2 + C^2 A \propto Z^f$, manifestum est per anthite... oriri hanc æquationem $Z^f. — C^2 A + BA^2 — A^3 \propto O$, vel hanc $A^3 — BA^2 + C^2 A — Z^{fol} \propto O$. Et si vero utraque formula nostro instituto accommodari possit, priorem tamen eligimus, eam scilicet in qua magnitudo omninò data Z^{fol} . afficitur semper affirmatè, ac secundum eam intelligi debent quæcumque postea dicturi sumus.

De constitutione æquationum quadraticarum.

CAPUT UNICUM.

Propositio prima.

SI $ZP — RA + A^2 \propto O$.

Sunt duo latera, ambo supra, quorum summa est R; rectangulum vero sub ipsis est ZP & fit A alterutrum ex istis.

Intelligatur enim $A — B \propto O$ sic ut $+A$ æquetur ipsi $+B$ vel $A — C \propto O$ sic ut $+A$ æquetur isti $+C$; unde si ducatur $A — B$ in $A — C$ quod inde orietur æquabitur nihilo. Productum autem illud est $BC — BA + A^2$, proinde hoc æquatur nihilo, quod semper accidet. Sive enim A æquetur ipsi B ita ut $A — B \propto O$, quicquid valeat $A — C$, si $A — B$ ducatur in $A — C$, hoc

hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, producit nihilum; five A æquetur ipsi C , ita ut $A - C \propto 0$, quicquid valeat $A - B$, si $A - C$ ducatur in $A - B$, hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, producit nihilum.

Jam BC vocetur ex hypothesi ZP ; & $B + C$ vocetur R ; fietque id quod proponitur nempe $ZP - RA + A^2 \propto 0$ qua in æquatione A potest explicari tam de ipso B quam de ipso C à quibus producit BC five ZP .

Pro determinatione.

DETERMINATIO alicujus æquationis est constitutio illa in qua vel omnia, vel quædam ex lateribus de quibus explicabilis est æquatio inter se æqualia sunt; unde cum de duobus tantum lateribus explicari potest æquatio, quales sunt quadraticæ unica tantum potest esse determinatio, cum scilicet duo latera sunt æqualia. Cum autem de tribus lateribus æquatio explicabilis est, quales sunt cubicæ; tunc duplex esse potest determinatio, altera quidem major, cum omnia tria latera æqualia sunt, altera vero minor, cum duo tantum æqualia sunt. Atque ita quo plura erunt latera in aliqua æquatione, id est quo potentia illius altior erit, eo plures erunt illius determinationes.

Jam in proposita æquatione unica esse potest determinatio in qua duo latera de quibus A est explicabile erunt æqualia; cum scilicet ZP æquatur $\frac{1}{4}R$: tunc enim unumquodque ex ipsis lateribus A æquale est $\frac{1}{2}$ ipsius R .

Nam in prædicta formula $BC - \frac{BA}{CA} + A^2 \propto 0$ in casu determinationis B intelligitur æquari ipsi C ; unde illa æquatio æquivalet huic $B^2 - 2BA + A^2 \propto 0$, five etiam huic per interpretationem $ZP - RA + A^2 \propto 0$

ut proponitur, ubi quoniam $R \propto 2B$ manifestum est ZP esse quadratum ipsius B , sive dimidii ipsius R , sive etiam ZP esse quartam partem quadrati ipsius R , & A quod æquatur ipsi B vel C , esse dimidium ipsius R .

Propositio secunda.

SI $ZP + RA - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum, idemque majus est supra, alterum minus est infra, differentia amborum est R , & rectangulum sub ipsis ZP & fit A , alterutrum ex ipsis, (intelligatur enim $B - A \propto O$ sic ut A dum erit supra, æquetur ipsi B ; vel $C + A \propto O$ sic ut A dum erit infra, æquetur ipsi C . Atque ex hypothesi sit B majus quàm C .) Si igitur $B - A$ ducatur in $C + A$, quod inde orietur æquabitur nihilo.

Productum autem id est $BC \frac{+BA}{-CA} - A^2$ æquatur nihilo. Quo pacto æquatio explicabilis est de A supra, æquali ipsi B . Ubi tamen æquatio hanc interpretationem accipere debet ut $BC \propto ZP$ & $B - C \propto R$. Quod si quis singulas æquationis partes conferre velit, ut noscat qua ratione ipsæ se invicem tollant, is reperiet $+BC$ & $-CA$ sese tollere, item $+BA$ & $-A^2$ se tollere quoque. Unde fit ut omnia homogenea simul nihilo æquivalent.

Jam si C intelligatur æquari ipsi A , atque $+C + A$ multiplicetur per $+B - A$, productum erit rursus $BC \frac{+BA}{-CA} - A^2$, quæ æquatio est eadem quæ supra, unde, illa explicabilis quoque est de A dum ipsum æquatur ipsi C , ita tamen ut ipsum sit infra ut indicat $C + A \propto O$, vide notas post æquationes cubicas. Hic autem $+BC + BA$ se invicem tollunt sicuti $-CA -$

A^2 ; ut rursus omnia nihilo æquantur; atque æquatio eandem quam supra accipere debet interpretationem.

Propositio tertia.

SI $ZP - RA - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum idemque minus est supra, alterum majus est infra, differentia amborum R , & rectangulum sub lateribus ipsis $ZP : A$ autem explicabile est de alterutro ex iisdem.

Intelligatur enim ut supra $B - A \propto O$ item $C + A \propto O$ & B minus sit quam C ; fiet ergo productum

$BC - BA - CA - A^2 \propto O$ quod quidem si hanc interpreta-

tionem accipiat ut $BC \propto ZP$, & $C - B$ sit R , habebimus æquationem propositam: cætera se habent ut supra.

Nec ulla est in duabus prædictis propositionibus determinatio, quia in utraque duo latera, de quibus A explicabile est, sunt semper inæqualia.

Item nulla alia est inter duas hæc æquationes differentia, nisi quod in priori latus quod est supra majus est eo quod est infra, in posteriori autem illud quod est supra, minus est eo quod est infra.

Propositio quarta.

SI $ZP - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera æqualia, quorum alterum est supra, alterum infra, rectangulum sub ipsis est ZP & fit A alterutrum ex iisdem.

Intelligatur enim $B - A \propto O$ sic ut $+A \propto +B$ supra. Item $C + A \propto O$, sic ut A ex se æquetur ipsi C infra; ponaturque B æuari eidem C : itaque si fiat multiplicatio ut in antecedentibus, productum erit

N ij

$BC \overset{+BA}{\text{---}CA} - A^2 \propto 0$. Quod si hanc interpretationem accipiat ut $BC \propto Z_P$, quia tollunt se invicem $\overset{+B}{\text{---}C}$ habebimus æquationem propositam $Z_P - A^2 \propto 0$, quæ explicabilis est tam de A supra æquali ipsi B, quam de A infra æqualia ipsi C.

Propositio quinta.

SI $Z_P + A^2 \propto 0$.

Nullum propriè loquendo est latus, sed nnicum planum æquale ipsi Z_P de quo quidem est explicabile ipsum A^2 .

Ejusmodi autem æquatio irregularis est, nec potest ipsa oriri ex multiplicatione, ut factum est in antecedentibus.

Nota ergo æquationes quasdam de planis tantum explicabiles esse, quod etiam ad solida & ultra in infinitum extendi, quivis satis doctus reperiet.

De constitutione æquationum cubicarum.

CAPUT PRIMUM.

SI $Z^f - S_P A + R A^2 - A^3 \propto 0$.

*vide postea
propositionem
specialem.*

Sunt tria latera positiva supra, quorum summa est R , summa trium rectangulorum ex ipsis binis ac binis sumptis est S_P , solidum autem sub iisdem contentum est Z^f , & fit A quodvis ex ipsis tribus.

$$B - A \propto 0$$

Intelligamus enim $C - A \propto 0$ & per quodvis ex istis

$$D - A \propto 0.$$

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 101
 tribus binomiis, per illud scilicet quod nihilo æquari
 intelligitur, multiplicetur productum ex aliis duobus,
 quicquid illa duo valeant, & quicquid valeat eorundem
 productum, fiet productum ex omnibus tribus æquale ni-
 hilo illud autem est.

$$\begin{array}{l} \text{---}BCA + BA^2 \\ BCD \text{---}BDA + CA^2 \text{---}A; \propto O \\ \text{---}CDA + DA^2 \end{array}$$

Omnia autem hanc interpretationem accipiunt ut $BCD \propto Z^f$.

$$\begin{array}{l} \text{Item---}BC \propto SP \ \& \text{---}B \propto R \\ \text{---}BD \qquad \qquad +C \\ \text{---}CD \qquad \qquad +D \end{array}$$

Quo pacto habebimus æquationem propositam $Z^f \text{---}SPA + RA^2 \text{---}A; \propto O$.

Quia vero in multiplicatione binomiorum, ipsum A triplicem valorem induere potuit, puta vel ipsius B, vel C, vel D, sic ut in eandem formulam semper incidamus, nec ullo modo mutetur æquatio, patet ipsam de eodem triplici A explicabilem esse, sub ipso triplici valore.

Determinatio præcedentis æquationis.

HUJUS æquationis determinatio duplex est, altera major, in qua omnia tria latera sunt æqualia; altera minor, in qua duo tantum æqualia sunt.

Major determinatio ejusmodi sortitur constitutionem ut Z^f æquale sit cubo tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum $Z^f \propto \frac{1}{27}R^3$, & SP æquale sit triplo quadrati ejusdem tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum SP

Nij

$\propto \frac{1}{3} R^2$, patet hoc ex eo quod ex constitutione præcedenti, si B, C, D, intelligantur tria latera æqualia, erit solidum BCD, five Zf æquale ipsi B $\frac{1}{3}$.

BC	B
Item plana BD simul, five SP $\propto \frac{1}{3} B^2$; & tandem latera C	
CD	D

simul, five R æqualia $\frac{1}{3} B$.

Minor determinatio longiori eget apparatu, pro quo ponamus duo latera æqualia esse ea quæ in constitutione præcedenti referebantur per B & C, quo pacto sic æquatio explicari poterit, ut $B^2 D \propto Zf$;

Item $B^2 + 2 BD \propto SP$ & $2 B + D \propto R$.

Atque ita $B^2 D - B^2 A + 2 BA^2 - A^3 \propto O$
 $- 2 BDA + DA^2$.

Jam quia B est A & $2 B + D$ est R, ideo $R - 2 A$ est D. Hanc ergo speciem induat D in posterum, ut sit $R - 2 A$.

Item B^2 est A^2 , quod ductum in D id est in $R - 2 A$, producit $RA^2 - 2 A^3$ quæ species proinde æqualis est Zf , & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{2} Zf. - \frac{1}{2} RA^2 + A^3 \propto O.$$

Rursus B^2 est A^2 ; & $2 BD$ est $2 RA - 4 A^2$ quæ ambas species simul constituunt, $2 RA - 3 A^2$ ambæ autem constituunt SP. Itaque $2 RA - 3 A^2 \propto SP$, & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{3} SP - \frac{2}{3} RA + A^2 \propto O.$$

Hic nisi ambigua esset hæc æquatio plana, ac de duobus lateribus supra explicabilis, jam haberetur valor ipsius A; sed quia duplex est valor ille nempe, vel latus ($\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} SP$) + $\frac{1}{2} R$, vel $\frac{1}{2} R -$ latere ($\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} SP$)

estque ex illis, alter quidem utilis, alter inutilis, atque etiam si utilem agnoscere non sit difficile, tamen quia ex comparatione quarundem aliarum æquationum ad simplicem lateralem, ac de unico coque vero latere explicabilem devenire possumus, ideo sic progrediemur.

Sed supra etiam $\frac{1}{2} Z^f. - \frac{1}{2} RA^2 + A^3 \propto O.$

Ascendat per A depressior harum æquationum nempe hæc

$$\frac{1}{3} SP - \frac{2}{3} RA + A^2 \propto O.$$

Atque ita fiet hæc $\frac{1}{3} SPA - \frac{2}{3} RA^2 + A^3 \propto O.$

Huc ergo æqualis est $\frac{1}{2} Z^f. - \frac{1}{2} RA^2 + A^3 \propto O.$

Sublatoque communi A^3 & addito $\frac{1}{2} RA^2$ puta per anthitesim fiet hæc æquatio.

$$\frac{1}{2} Z^f. \propto \frac{1}{3} SPA - \frac{1}{6} RA^2.$$

Et communidivisor $\frac{6}{R}$ adhibito $3 Z^f. \propto \frac{2SPA}{R} - A^2.$

Atque omnibus ordinatis $3 Z^f. - \frac{2SPA}{R} + A^2 \propto O.$

Sed rursus ut supra $\frac{1}{3} SP - \frac{1}{3} RA + A^2 \propto O.$

Ergo hæ duæ æquationes invicem æquales sunt, unde sublato communi A^2 & per anthitesim fiet hæc æquatio $3 Z^f. = \frac{1}{3} SP = 2SPA = \frac{2}{3} RA.$

$$\frac{R}{R} \quad \frac{R}{R}$$

Itaque $3 Z^f. = \frac{1}{3} SP$

$$\frac{\frac{2SPA}{R} = \frac{2}{3} R}{R} \text{ est valor ipsius } A$$

Si ergo accadat aliquam ex præmissis differentiis vel utramque esse æqualem nihilo, vel alteram esse nihilo minorem, alteram verò nihilo majorem, nulla erit ejusmodi determinatio: sed æquatio explicari poterit de tribus lateribus supra, at de uno tantum. Aliquo ramen casu fieri poterit, ut sub proposita initio æquationis formula unicum inveniatur latus supra, & unicum infra, quod proprie latus non est, sed planum tunc autem propositio specialis est cujus explicandæ hic est locus.

Propositio secunda specialis.

$$\begin{array}{l} \text{S} \quad \text{I} \quad Z^f \text{---} S P A \text{+} R A^2 \text{---} A \text{:} \propto O, \\ \text{Sit autem} \quad \frac{Z^f \propto S P.}{R} \end{array}$$

Sunt duo latera, alterum supra æquale ipsi R, alterum infra non proprie latus, sed planum æquale ipsi SP, & A explicari potest de quolibet ipsorum. Fingatur enim $B P \text{+} A^2 \propto O$ quæ æquatio explicabilis est de unico plano infra æquali ipsi BP ut notatum est prop. 5^a. Æquat. quadraticarum.

Item $C \text{---} A \propto O$ tum fiat multiplicatio ut consuevimus.

$$\text{Orietur ergo } B P C \text{---} B P A \text{+} C A^2 \text{---} A \text{:} \propto O,$$

Hæc æquatio eam accipiat interpretationem ut $B P C \propto Z^f$, & $B P \propto S P$, atque $C \propto R$.

Quod pacto indecimus in æquationem propositam, ubi manifestum est ex generatione $Z^f \propto S P$, & A esse

$\frac{R}{R}$

æquale vel ipsi C, hoc est R supra, vel A^2 est æquale ipsi BP, hoc est SP infra.

CAPUT SECUNDUM.

Propositio prima.

SI $Z^f - SPA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt supra, & tertium infra, idemque majus duobus reliquis simul sumptis, differentia seu excessus tertii, supra summam duorum priorum est R: at SP est differentia seu excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, supra id, quod sub primo & secundo, solidum autem Z^f quod fit sub tribus, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Intelligentur enim B — A

C — A

D + A

Quorum D sit majus ambobus B & C simul sumptis; sit autem quævis ex illis tribus speciebus nihilo æqualis, & fiat multiplicatio solito modo orieturque,

— BDA + DA²

BCD — CDA — BA² + A³ $\propto O$.

+ BCA — CA²

& quia D majus ponitur quam B & C simul, manifestum est BC multo minus esse quam BD & CD simul sumpta. Itaque omnia hanc interpretationem recipiant ut + D — B — C sit + R, item — BD — CD + BC sit — SP, & BCD sit Z^f . quo pacto incidemus in æquationem propositam.

$Z^f - SPA + RA^2 + A^3 \propto O$.

Patet autem ex formula, A explicabile esse tam de B
Rec. de l'Acad. Tom. VI. O

aut C supra quàm de D infra, quia in multiplicatione binomiorum ipsum triplicem hunc valorem induere potuit.

Determinatio præcedentis æquationis.

DETERMINATIO unica est, nempe minor, cum scilicet duo latera supra sunt æqualia; aliter enini æqualia esse non possunt: si quidem illud quod est infra, duobus reliquis simul majus est.

Posito ergo quod B & C sunt æqua, explicari poterit formula æquationis hoc modo.

$$B^2 D - 2 B D A + D A^2 \\ + B^2 A - 2 B A^2 A^3 \propto 0.$$

Quoniam autem B est A & D — 2 B est R, ergo D — 2 A est R & per anthitesim R + 2 A est D, hanc ergo speciem induat D in posterum ut sit R + 2 A.

Item B² est A², quod ductum in D, id est in R + 2 A producit RA² + 2 A³, quæ species proinde æqualis est Z^f & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{2} Z^f - \frac{1}{2} R A^2 - A^3 \propto 0.$$

Rursus B² est A², & 2 BD est 2 RA + 4 A². Quorum ambarum specierum differentia est 2 RA + 3 A², hæc idcirco æqualis est S p & omnibus ordinatis.

$$\frac{1}{2} S p - \frac{2}{3} R A - A^2 \propto 0.$$

Ascendat hæc æquatio par A gradum, atque ita rursus

$$\frac{1}{2} S p A - \frac{2}{3} R A^2 - A^3 \propto 0.$$

Ergo huic æquationi æquatur hæc

$$\frac{1}{2} Z^f - \frac{1}{3} R A^2 - A^3 \propto 0.$$

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. 107
 Additisque communibus A^3 , & $\frac{1}{2} RA^2$ fiet hæc

$$\frac{1}{2} SP A - \frac{1}{2} RA^2 \propto \frac{1}{2} Z^f.$$

Et communi divifore adhibebito $\frac{1}{2} R$, erit $\frac{2 SP A -}{R}$

$$A^2 \propto \frac{3 Z^f}{R}$$

Et omnibus ordinatis $\frac{3 Z^f}{R} - \frac{2 SP A}{R} + A^2 \propto O$.

Mutatifque omnibus signis $-\frac{3 Z^f}{R} + \frac{2 SP A}{R} -$

$$A^2 \propto O.$$

Sed rurfus fupra $\frac{1}{2} SP - \frac{1}{2} RA - A^2 \propto O$.

Itaque addito communi A^2 & per anthitesim fiet hæc æquatio

$$\frac{3 Z^f}{R} + \frac{1}{2} SP \propto \frac{2 SP A}{R} + \frac{1}{2} RA.$$

$$\text{Itaque } \frac{3 Z^f}{R} + \frac{1}{2} SP$$

$$\frac{2 SP + \frac{1}{2} R}{R} \text{ est valor ipfius } A.$$

Propofitio fecunda.

$$SI Z^f - SP A + A^3 \propto O.$$

Sunt tria latera, quorum duo funt fupra, & tertium infrà, idemque æquale duobus prioribus fimul fumptis.

SP eft exceffus fummx duorum rectangulorum, ejus fcilicet quod fub primo & tertio, & ejus quod

O ij

sub secundo & tertio, supra id quod sub primo & secundo.

Z^f. autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus: ponantur enim eadem species quæ supra, nisi quod D intelligi debet æquale duobus B & C simul, fietque rursus eadem æquatio.

$$\begin{array}{r} -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ +BCA - CA^2 \end{array}$$

Quoniam autem D, ponitur æquale duobus B & C simul, ideo evanescet affectio sub A² quia —BA² — CA² tollunt DA², superest ergo tantum.

$$\begin{array}{r} -BDA + \\ BCD - CDA + A^3 \propto O \\ +BCA \end{array}$$

Ubi rectangula BD & CD simul majora sunt quam BC.

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut BCD æquetur Z^f. & —BD

$$\begin{array}{r} -CD æquetur -SP, \\ +BC \end{array}$$

Incidemus in æquationem propositam Z^f — SP A + A³ ∝ O.

Ubi manifestum est ipsum A explicabile esse tam de B & C suprâ, quàm de D infrâ.

* Quoniam
D æquatur B
& C simul;
ac B & C si-
mul in D æ-
quales sunt 4
B², ex qui-
bus sublato
BC quæ est
B² restat 3B².

Determinatio rursus unica est, nempe minor, cum duo latera suprâ sunt æqualia, neque enim aliter æqualia esse possunt, cum illud quod est infrâ duobus reliquis simul sumptis sit æquale.

Invenietur ergo hæc determinatio sic.

Positis B & C æqualibus, æquatio talis esse poterit,
B² D — 3 B² A + A³ ∝ O unde SP ∝ 3 B². *

Posito ergo, quod B sit A ex hypothefi determinationis, tunc $SP \propto 3 A^2$.

Itaque $\frac{1}{3} SP$ est valor ipfius A^2 & $Z^f \propto 2 A^3$.

Propofitio tertia.

SI $Z^f - SPA - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo funt fuprà, & tertium infrà, idemque minus duobus prioribus fimul fumptis, exceffus fumma duorum priorum fuprà tertium eft R, at rurfus ut in duabus præcedentibus propofitionibus fumma duorum reftangulorum, ejus fcilicet, quod fub primo & tertio, & ejus quod fub fecundo & tertio excedit id quod fub primo & fecundo, & exceffus eft SP; Z^f autem eft id quod fub tribus continetur, & A explicabile eft de quolibet ex ipfis tribus.

Ponantur enim eadem fpecies quæ fuprà ea tamen lege ut D intelligatur minus quàm B & C fimul, & reftangula BD & CD fimul majora quàm BC, fietque rurfus hæc æquatio ut fuprà, nempe

$$\begin{aligned} & - BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 & \propto O \\ & + BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Quæ æquatio fi hanc interpretationem accipiat, ut exceffus B & C fimul fuprà D, fit R; at exceffus reftangulorum BC & CD fimul fuprà BC, fit SP; item folidum BCD fit Z^f , incidemus in æquationem propofitam,

$$Z^f - SPA - RA^2 + A^3 \propto O.$$

Ubi manifefturn eft A explicari poffe tam de B & C fuprà, quàm de D infrà.

Determinatio præcedentis æquationis.

HUJUS propositionis determinatio triplex esse potest, prima major, cum omnia tria latera sunt æqualia; secunda, cum duo latera suprâ tantum sunt æqualia; & tertia, cum alterum eorum laterum, quæ sunt suprâ, æquale est ei quod est infrâ. Utraque autem harum posteriorum minor est, quàm idcirco hic accidit esse duplicem.

Et quidem major determinatio facillima est.

Positis enim B, C, D æqualibus, factaque binomiorum multiplicatione, & sublati quæ se invicem destruunt, manifestum est superesse

$$BCD - BDA - BA^2 + A^3 \propto O.$$

$$\text{Sive quod idem est } B^3 - B^2 A - BA^2 + A^3 \propto O.$$

Itaque Z^f est B^3 sive A^3 .

Sp est B^2 sive A^2 & R, est B sive A.

Prior autem duarum minorum determinationum, cum scilicet duo latera suprâ sunt æqualia, instituitur modo præmissio, tam in prima propositione primi capitis æquationum cubicarum, quàm in prima secundi capitis: positis enim lateribus B & C æqualibus, & argumentando ut suprâ in prædictis propositionibus, præcipuè vero ut in prima secundi capitis, nisi quod hic D invenietur esse $2A - R$, reperiemus tandem valorem ipsius A esse

$$\frac{\frac{3}{2} Z^f - \frac{1}{3} SP}{R}$$

$$\frac{2 SP + \frac{2}{3} R}{R}$$

Tandem altera duarum minorum determinationum, cum scilicet alterum laterum suprâ æquale est ei quod est

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. III
 infra, facilis est: posito enim quod B sit æquale ipsi
 D in formula præmissa, ac sublatiis iis quæ se invicem
 tollunt, remanebit hæc æquatio, $B^2 C - B^2 A - CA^2$
 $+ A^3 \propto O$.

Itaque in æquatione proposita $Z^f \propto B^2 C$, $SP \propto B^2$
 & $R \propto C$:

At C est unum ex duobus lateribus suprâ, itaque ipsum
 R est unum ex lateribus suprâ.

Item eadem ratione B^2 sive SP est quadratum alterius
 lateris suprâ, idemque quadratum ejus quod est infrâ: er-
 go A explicabile est, tam de R suprâ, quàm de S suprâ
 & infrâ.

Propositio quarta.

SI $Z^f - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera quorum duo sunt suprâ, & tertium
 infrâ idemque minus quovis duorum priorum, ex-
 cessus summæ duorum priorum supra tertium, est R. At
 summa duorum rectangulorum ejus scilicet quod sub pri-
 mo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, æqualis
 est ei quod sub primo & secundo. Z^f . autem est id quod
 sub tribus continetur & A explicabile est de quolibet ex
 ipsis tribus.

Resumatur enim formula hujus capitis.

$$\begin{aligned} & -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 & \propto O \\ +BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Intelligaturque D minus esse quàm B & C simul, &
 singula: at rectangulum BC æquale sit ambobus simul
 BD & CD, itaque tollunt se invicem ipsa rectangula, &
 sic evanescit affectio sub latere A, quia B & C simul supe-
 rant D; differentia esto R, & solidum BCD vocetur 2 so-

112 DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.
 lidum, quo pacto incidemus in æquationem propositam;
 nempe

$$Z^f - RA^2 + A; \propto O.$$

Ubi palam est A explicari posse, tam de B & C suprâ,
 quàm de D infrâ.

Determinatio.

HUJUS propositionis unica est determinatio, eaque
 minor, cum scilicet duo latera suprâ sunt æqualia:
 neque enim aliter æqualia esse possunt, quia unumquod-
 que eorum quæ sunt suprâ, majus est eo quod est infrâ.

Ponantur ergo æqualia B & C, unde in formula præ-
 missa, sublatis quæ se invicem tollunt, talis erit æquatio.

$$B^2 D + DA^2 \\ - 2BA^2 + A; \propto O.$$

Jam quia B est A & 2 B — D est R, idè 2 A — R est
 D. Item quia BD & CD simul æqualia sunt BC, idè si
 loco tam B quàm C sumatur A, & loco ipsius D sumatur
 2 A — R fiet hæc æquatio.

$$4A^2 - 2RA \propto A^2 \text{ hoc est } 3A^2 - 2RA \propto O.$$

Et communi divisore 3 A fiet $A - \frac{2}{3}R \propto O.$

Quapropter $\frac{2}{3}R$ est valor ipsius A.

Propositio quinta.

SI $Z^f + SP A - RA^2 + A; \propto O.$

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprâ, & tertium
 infrâ, idemque minus quovis duorum priorum, ira ut
 excessus summæ duorum priorum, suprâ tertium sit R;
 at summa duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub
 primo

DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM. II;

primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, minor est eo rectangulo, quod fit ex primo & secundo; differentia autem est SP ; Z^f . autem est id quod sub tribus lateribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus lateribus.

In formula præcedentium quam hic resumimus.

$$\begin{aligned} & \text{---} BDA \text{---} B A^2 \\ BCD \text{---} CDA \text{---} C A^2 & + A : \propto O \\ & + BCA + DA^2 \end{aligned}$$

Intelligentur latera B & C tam simul quàm sigillatim, majora esse quàm D , & rectangulum BC majus quàm duo simul BD & CD . Quo posito & adhibita hac interpretatione ut excessus summæ laterum B & C suprà D sit R ; item excessus rectanguli BC suprà summam reliquorum BD & CD sit SP , at solidum BCD sit z^f . manifestum est nos incidere in æquationem propositam, & A explicabile esse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

HUJUS æquationis determinatio unica est eaque minor, tum scilicet duo latera suprà æqualia sunt, neque alia reperiri potest laterum æqualitas, cum unumquodque ex duobus prioribus majus sit quàm tertium.

Posito ergo quod B sit æquale ipsi C in formula præmissa, & augmentando ut in prima propositione primi capitis, aut prima secundi æquationum cubicarum, inveniemus D esse $2 A \text{---} R$, & SP esse $2 RA \text{---} 3 A^2$, unde tandem deducetur valor ipsius A ,

$$\begin{array}{r} 3 Z^f + \frac{1}{3} SP \\ \hline R \\ \hline \frac{2}{3} R \text{---} 2 SP \\ \hline R \end{array}$$

Propositio sexta irregularis.

SI $Z^f + SPA + A^3 \propto O$.

In hac æquatione A est explicabile de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium, vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua ipsa oriri possit. Potest tamen constitutio illius deduci, ex quatuor proportionalibus, hac ratione ut differentia extremarum sit Z^f ; rectangulum

$$\frac{1}{3} SP$$

autem sub extremis vel mediis sit $\frac{1}{3} SP$, & A sit differentia mediarum.

Sed neque hæc, neque aliæ similes quæ de solis lateribus infrà explicari possunt æquationes ad usum communem revocari possunt, nisi per transmutationem aliarum æquationum, quod etiam rarò aut nunquam accidit.

Propositio septima irregularis.

SI $Z^f + RA^2 + A^3 \propto O$.

Rursus in hac æquatione A explicabile est de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua illa oriri possit. Facile tamen hæc æquatio transmutabitur in aliam similem ei, quæ habetur propositione 6^a seu præcedenti, unde constitutio ejus ex quatuor proportionalibus deducetur ut suprà; sed neque alia esse potest, quàm præcedentis, utilitas.

Propositio octava irregularis

SI $Z^f + A^3 \propto O$.

Unicum etiam est latus infrà, idemque æquale lateri cubico ipsius Z^f .

CAPUT TERTIUM.

HOC caput tot propositiones habet, quot præcedens, atque has illarum sigillatim inverſas, hac ratione, ut quæ illic ſuprà erant latera, hic ſint infrà, & è contrario. Determinationes autem in utroque capite ſunt penitus eadem: itaque expoſita formula univerſali, quinque priorum propositionum regularium, enumeratiſque breviter ſingulis octo propoſitionibus, reliqua ad idem caput præcedens remitemus.

Pro formula igitur univerſali, intelligantur duo latera infrà, & unum ſuprà hac ratione

$$B + A \propto O$$

$$C + A \propto O$$

$$D - A \propto O$$

ſiatque multiplicatio qualem conſuevimus habita ratione ſignorum, atque ita reperiemus.

$$\begin{aligned} &+ BDA - B A^2 \\ BCD + CDA - C A^2 - A &\propto O. \\ - B C A + D A^2 \end{aligned}$$

Qua ratione duo latera infrà intelliguntur æqualia iſtis B & C; illud autem quod eſt ſuprà, intelligitur æquale iſſi D.

Jam differentia inter ſummam laterum B & C & unicum D, eſto R; differentia autem inter ſummam reſtangularum BD & CD atque unicum BC, eſto SP: item ſolidum BCD eſto Z^f. Hoc pacto prout exceſſus erit panes hæc vel illud, vel etiam aliquando nullus, orientur quinque propoſitiones regulares.

Propositio prima.

SI $Z^f + SPA - RA^2 = A; \propto O.$

Sunt tria latera, duo quidem infrà, & unum suprà, idemque majus summa duorum priorum, & differentia est R; rectangulum autem sub summa priorum & tertio excedit rectangulum sub duobus prioribus, & excessus est SP. At Z^f est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Determinatio.

PRO detrminatione, positis duobus lateribus quæ sunt infrà, inter se æqualibus, recurremus ad primam propositionem secundi capitis, mutatis tamen iis quæ hic sunt infrà, in ea quæ ibi erant suprà, reperiemus valorem ipsius A infrà, æquale esse.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} Z^f + \frac{1}{2} SP \\ R \\ \hline \frac{2}{3} SP + \frac{2}{3} R \\ R \end{array}$$

Propositio secunda.

SI $Z^f + SPA - A; \propto O.$

Vide secundam propositionem 2^a capitis, mutatis tamen suprà & infrà, ut jam diximus, neque etiam determinatione differunt.

Propositio tertia.

SI $Z^f + SPA - RA^2 - A^3 \propto O$.

Vide tertiam secundi capitis, mutatione facta ut diximus, determinatio eadem erit.

Propositio quarta.

SI $Z^f - RA^2 - A^3 \propto O$.

Vide iisdem mutatis, quartam secundi capitis ejusque determinationem.

Propositio quinta.

SI $Z^f - SPA - RA^2 - A^3 \propto O$.

Vide iisdem mutatis, quintam propositionem 2ⁱ capitis ejusque determinationem.

Propositio sexta irregularis.

SI $Z^f - SPA - A^3 \propto O$.

Unicum est latus suprà, pro quo vide sextam propositionem secundi capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

Propositio septima irregularis.

SI $Z^f + RA^2 - A^3 \propto O$.

Unicum est latus suprà pro quo vide sextam propositionem 2ⁱ capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

Propositio octava irregularis.

SI $Z^f - A^3 \propto O$.

Unicum est latus suprà, æquale lateri cubico Z^f .

CAPUT QUARTUM.

HOc etiam caput universum est primi cubicorum; differunt enim in eo tantum quod quæ illic erant latera suprâ, hic sunt infrâ, idque in prima propositione, quæ prorsus regularis est: at in secunda, quæ aliquo pacto est irregularis, ambo latera remanent infrâ, etiam si illic alterum esset suprâ, alterum infrâ, nec etiam in ambabus formula est eadem, quapropter utramque hic apponemus, etiam si utraque sit inutilis, nisi ex transmutatione aliunde oriatur, quod etiam rarò, aut nunquam accidere potest.

Propositio prima.

SI $Z^c + SP A + RA^2 + A^3 \propto O$.
Et Z^c non sit æquale ipsi SP .

R

Sunt tria latera positiva infrâ, quorum summa est R ; tria rectangula sub ipsis, binis ac binis sumptis simul, constituunt SP : at Z^c est quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Statuantur enim tria latera positiva infrâ, in binomiis ut consuevimus hoc pacto

$$B + A \propto O$$

$$C + A \propto O$$

$$D + A \propto O$$

& fiat multiplicatio ut in superioribus, orieturque

$$\begin{aligned} &+ BDA + B A^2 \\ BCD + CDA + CA^2 + A^3 &\propto O \\ &+ BCA + DA^2 \end{aligned}$$

quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut $B + C + D$ sit R ; & $BD + CD + BC$ sit SP , item BCD sit Z^{sol} , incidemus in æquationem propositam, ubi manifestum est A explicabile esse tam de B , quàm de C , & de D , infrà.

Determinatio eadem prorsus est, quæ in prima propositione primi capitis cubicarum, atque id tam in majori quàm in minori determinationum ibi expositarum.

Propositio secunda.

SI $Z^{\text{f}} + SP A + RA^2 + A^3 \approx O$.
 Sit autem $Z^{\text{f}} \approx SP$.
 $\frac{\quad}{R}$

Sunt duo latera ambo infrà, alterum quidem æquale longitudine ipsi R , alterum autem non proprie latus, sed planum æquale SP , & Z^{f} est id quod continetur sub primo latere in planum, quod secundi locum obtinet sive $SP R$, & A explicabile est de quolibet.

Statuatur enim $R + A \approx O$
 & $SP + A^2 \approx O$

ut sint latus & planum, ambo positiva infrà, fiatque multiplicatio; atque ita orietur hæc æquatio.

$$R SP + SP A + RA^2 + A^3 \approx O.$$

Jam $R SP$ esto Z^{f} , qua ascita interpretatione incidemus in æquationem propositam, quæ proinde explicabilis est tam de A æquali, ipsi R , quàm de A æquali potentia ipsi SP^o , ut est propositum.

Nota circa æquationes præmissas, & circa eas quæ ad altiores gradus aut potentias pertinere possunt.

Prima.

OMNIS affectio sub latere positivo suprâ, sequitur naturam sui signi, censetur enim affirmativa vel negativa suprâ, prout illa afficitur signo affirmationis vel negationis. Idem intellige de affectionibus sub omnibus gradibus, atque etiam de omnibus potentiis ejusdem lateris positivi suprâ.

Secunda.

UT autem innotescat etiam quid censendum sit de affectionibus sub latere positivo infrâ, ejusque gradibus & potentiis, præmittendum est primum id quod jam notavimus, nempe affirmativum infrâ æquivalere negativo suprâ, & è contrario.

Deinde circa latera suprâ, ideo $+$ multiplicatum per $+$ producere $+$, quia multiplicator affirmativus affirmat affirmationem multiplicati. Ideo autem $-$ per $-$ producere $+$, quia multiplicator negationis negat negationem multiplicati, atque ita constituit affirmationem. At $+$ per $-$ vel $-$ per $+$, ideo producere $-$, quia multiplicator affirmativus affirmat negationem multiplicati, vel multiplicator negativus negat affirmationem multiplicati, atque ita constituit negationem.

Hinc igitur, quia latus affirmativum infrâ, æquivalet negativo suprâ, omnis affectio sub latere positivo infrâ, sequitur contrariam sui signi naturam, ita ut si sit affirmativum infrâ, æquivalet negativo suprâ & è contrario.

Contra

Contra verò quadratum lateris positivi infrà, æquale quadrato lateris positivi suprà, quia fit ex $+$ A in $+$ A, vel ex $-$ A in $-$ A, unde quovis modo fit $+$ A² suprà, vel æquale. Itaque omnis affectio sub quadrato lateris positivi infrà, sequitur naturam sui signi affirmativi vel negativi : in altioribus verò gradibus, simili argumento concludemus idem accidere affectioni sub cubo, quod sub suo latere : & quadratoquadrato, quod suo quadrato, atque ita continuè per gradus altiores, ut illi qui statuuntur in locis imparibus, imitentur latus ipsum; qui autem statuuntur in locis paribus, imitentur quadratum.

Insuper omnis affectio, quæ retinet naturam sui signi, ducta in affectionem, quæ itidem naturam sui signi retineat, producit aliam, quæ etiam naturam, sui signi retinet. Sed & affectio quæ sequitur contrariam sui signi naturam, ducta in affectionem quæ contrariam sui signi naturam sequatur, producit aliam, quæ sequitur eandem sui signi naturam.

Contrarium autem accidit dum ducuntur inter se duæ affectiones, quarum una sui signi naturam sequatur, altera contrariam, quæ enim inde fit affectio, sequitur contrariam sui signi naturam.

Tertia.

EX duabus notis præmissis non difficile erit explicare, cum ex multiplicatione binomiorum in omnibus capitibus jam expositis, circa quadratas & cubicas affectiones, producat tandem æquatio quæ nihilo æqualeat, id autem uno aut altero exemplo illustrabimus.

Proponatur primum, ut in propositione secunda quadraticarum, hæc æquatio

Rec. de l'Acad. Tom. VI.

Q

$$\begin{array}{c} +BA \\ BC-CA-A^2 \propto O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio orta est ex ductu affectionum $B-A$ & $C+A$ in se invicem, intelligatur ergo primo casu, B suprâ æquari ipsi A suprâ unde $B-A$ æquatur nihilo; quia tam B quàm A , cum sint suprâ, sequuntur naturam sui signi, quæ signa cum sint contraria, manifestum est B & A tollere se invicem.

Jam $C+A$ cujuscumque valoris sit ducatur in $B-A$, fit rursus manifestò

$$\begin{array}{c} +BA \\ BC-CA-A^2 \propto O. \end{array}$$

Ubi omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, quia quæ ipsas produxerunt, sui signi naturam sequebantur, & quia B æquatur A , ideo BC æquatur CA , quare propter signa contraria tollunt se invicem $+BC-CA$.

Item BA æquatur A^2 , quare propter signa contraria tollunt se invicem $+BA-A^2$, atque ita omnes affectiones simul nihilo æquivalent, dum scilicet B æquatur ipsi A suprâ.

Sed secundo casu, esto C suprâ æquale ipsi A infrâ: unde $C+A$ æquatur nihilo, quia ipsum $+A$ infrâ sequitur contrariam sui signi naturam, æquivaletque ipsi $-A$ suprâ, sicque tollunt se invicem $+C+A$.

Jam $B-A$ cujuscumque valoris sit, ducatur in $C+A$, fit manifestò

$$\begin{array}{c} +BA \\ BC-CA-A^2. \end{array}$$

Ubi duæ affectiones sub latere A , scilicet $+BA$, sequuntur $-CA$.

tur contrariam sui signi naturam; at A^2 & $+BC$ sui ipsius signi naturam sequuntur; & quia C æquatur A , ideo BC æquatur BA , & CA æquatur A^2 , quare tollunt se invicem $+BC + BA$, quia BC eandem, BA vero contrariam sui signi sequitur naturam. Eadem ratione tollunt se invicem $—CA — A^2$ quia CA contrariam, A^2 vero eandem sui signi naturam sequitur: atque ita rursus omnes affectiones simul nihilo æquivalent, cum ipsum C suprâ æquetur ipsi A infrâ.

Cum vero sic interpretamur æquationem ut BC sit ZP , at $+B$ sit R , ut sic $ZP + RA — A^2 \propto O$. Patet
 $—C$

ipsum R , esse differentiam inter B majus & C minus; quia illæ affectiones $+BA$ & $—CA$ habent signa diversa, & præterea vel ambæ eandem, vel ambæ contrariam sui signi naturam sequuntur, impediunt ergo signa diversa ne simul jungi debeant.

Item in hac æquatione $ZP + RA — A^2 \propto O$.

Dum A intelligitur esse suprâ, omnes affectiones sunt suprâ, sequunturque naturam sui signi, & sic sola affectio A^2 æquatur reliquis duabus simul.

E contrario vero cum A intelligitur esse infrâ, tum ZP & A^2 sequuntur naturam sui signi, RA vero contrariam, sicque $+RA$ infrâ æquivaleret $—RA$ suprâ. Unde $+RA — A^2$ simul æquivalent ipsi ZP .

Jam in secundo exemplo proponatur æquatio propositionis primæ secundi capitis cubicarum

$$Z^f — SPA + RA^2 + A^3 \propto O.$$

Cujus constitutionem deduximus ex multiplicatione sive ductu harum trium affectionum, $B — A$

$$C — A$$

$$D + A$$

Qij

Ex quo oritur hæc æquatio, posito tamen quod D majus sit quàm B & C simul.

$$\begin{aligned} & -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 & \propto 0 \\ & +BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Quam quidem æquationem legitimam esse, siue B supra æquetur A supra, siue C supra æquetur A supra, siue tandem D supra æquetur A infra, sic ostendimus.

Ponamus primo casu B supra æquari A supra, unde $B - A \propto 0$.

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam $C - A$, quàm $D + A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{aligned} & +CA \\ CD - DA - A^2 & ; \end{aligned}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia tam A, quàm B, C, D ex quibus ortæ sunt, sunt supra. Hoc autem totum productum quicquid valeat ducatur in $B - A$, atque ita tandem orietur

$$\begin{aligned} & -BDA + DA^2 \\ ECD - CDA - BA^2 + A^3 & \\ & +BCA - CA^2 \end{aligned}$$

Cujus omnes affectiones sequuntur sui signi naturam; propter rationem jam allatam. Quoniam ergo B ponitur æquale ipsi A, ideo BCD æquatur CDA, atque ita tollunt se invicem $+BCD - CDA$; eadem ratione tollunt se invicem $-BDA + DA^2$; item $+BCA - CA^2$ ac tandem $-BA^2 + A^3$, unde patet omnes affectiones simul, nihilo æquivalere, dum B æquatur ipsi A.

Secundo casu C suprà æquetur ipsi A suprà; unde $C - A \propto 0$.

Jam sub ipso valore A quicquid valeat tam $B - A$, quàm $D + A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, oriaturque manifestò

$$+ B A \\ BD - DA^2 - A^2$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia A, B, C, D ponuntur esse suprà. Hoc autem totum productum, quicquid valeat, ducatur in $C - A$, oriatur rursus ut in primo casu

$$- BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto 0 \\ + BCA - CA^2$$

Ubi etiam omnes affectiones sequuntur naturam sui signi propter eandem rationem. Quoniam ergo C ponitur æquari ipsi A, ideo BCD æquatur ipsi BDA, atque ita tollunt se invicem $+ BCD - BDA$: eadem ratione tollunt se $- CDA + DA^2$; item $+ BCA - BA^2$: ac tandem $- CA^2 + A^3$. Unde patet quod existente C æquali ipsi A, omnes affectiones simul nihilo æquivalent.

Tertio & ultimo casu, intelligatur D suprà æquari A infrà. Quo pacto $D + A \propto 0$.

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam $B - A$, quàm $C - A$, ducantur invicem hæ duæ affectiones, oriaturque

$$- B A \\ BC - CA + A^2;$$

Ubi, quia tam B, quàm C sunt suprà, A autem infrà, duæ affectiones BC & A^2 sequuntur naturam sui signi.

duæ verò reliquæ BA contrariam. Hoc autem totum
CA

productum quicquid valeat, ducatur in D + A,
oriaturque idem omnino quod primo & secundo casu,
nempe

$$\begin{aligned} & \text{---BDA + DA}^2 \\ \text{BCD --- CDA --- BA}^2 \text{ + A}^3 \\ & \text{+ BCA --- CA}^2 \end{aligned}$$

Hic verò omnes affectiones sub latere A, atque etiam
cubi A³ sequuntur contrariam sui signi naturam per re-
gulas præmissas, quia oriuntur ex multiplicatiene affec-
tionum, BD, CD, BC, & A², quæ omnes sequuntur
naturam sui signi in A quod sequitur contrariam.

Quoniam ergo D supra ponitur æquale A infra, ideo
BCD æquatur BCA, unde tollunt se invicem + BCD
+ BCA: nam etiam si signa sint eadem, tamen natura est
contraria. Eadem ratione tollunt se invicem --- BDA
--- BA², item --- CDA --- CA², & denique + DA²
+ A³.

Unde patet quod existente D supra æquali ipsi A infra,
omnes affectiones simul nihilo æquivalent. Sive ergo B
vel C supra æquetur ipsi A supra, sive D supra æquetur
A infra, semper stabit æquatio, & omnes affectiones simul
nihilo æquivalent.

Itaque in æquatione proposita Z f. --- SP A + RA²
+ A³ ∞ O.

SP intelligitur esse differentia inter summam duorum
planorum BD, CD, & planum BC: at longitudo R est dif-
ferentia inter summam laterum B, C, & latus D, quæ
sunt æqualia tribus illis de quibus potest explicari A, in
æquatione. Rursus cum in eadem æquatione A intelli-
gatur esse supra, tunc omnes affectiones sequuntur natu-
ram sui signi, unde sola affectio SP A æquatur tribus re-

liquis simul sumptis. Contrà verò cum A intelligitur esse infra, tunc affectiones sub latere A & ipsius cubo A; sequuntur naturam contrariam sui signi, duæ autem reliquæ eandem, unde— SPA infra æquivaleret $+$ SPA supra, & $+$ A^3 infra æquivaleret— A^3 supra, sicque sola affectio A^3 æquatur tribus reliquis simul sumptis.

His duobus exemplis rite perceptis, non erit difficile idem in omnibus æquationibus extendere, quæ ex duobus, tribus vel etiam pluribus lateribus efformabuntur.

Quarta..

CUM autem planum aliquod ex se ponitur sequi naturam contrariam sui signi, tunc occurre posset difficultas circa affectiones lateris quod potentiâ æquale intelligitur eidem plano, & circa affectiones aliorum graduum ejusdem lateris, quæ difficultas etiam si non difficile solvi possit, speciatim in omnibus affectionibus oblatis, quia tamen prolixa esset solutio, præcipue quia extendi deberet non ad planum tantum, sed etiam ad gradus altiores, ideò nos solutionem afferemus in universum, quæ ad quascumque æquationes, etiam eas de quibus jam egimus, extendi potest, eamque aliquo exemplo illustrabimus.

Intelligatur ergo BP supra $+$ A^2 infra $\propto O$. Ubi manifesto A^2 quod planum est, sequitur naturam sui signi contrariam. Sit autem quævis æquatio, quæ orta sit ex multiplicatione hujus affectionis $BP + A^2$ in aliam quamcumque affectionem, in qua æquatione A sit explicabile de latere A, quod potentiâ æquale sit ipsi BP. Ut ostendamus omnes affectiones æquationis simul nihilo æquavalere sic ratiocinabimur. Quia affectio $BP + A^2$ in aliam quamcumque affectionem ducitur, certum est in ipsam duci primum separatim BP quod sequitur con-

trariam: quicquid ergo producat BP , id omne simul; æquale est ei, quod producitur ab A^2 propter æqualitatem BP & A^2 ; sed & singula producta singulis productis sunt æqualia propter eandem rationem, & in singulis æqualibus signa erunt eadem, quia BP & A^2 habent idem signum. At propter contrariam naturam BP & A^2 singula producta æqualia contrariæ erunt naturæ, atque idcirco tollent se invicem, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut preponitur.

Ut autem in omnibus æquationibus idem locum habere manifestum sit, intelligatur $BP - A^2 \propto O$, sintque tam BP quam A^2 suprâ, & utrumque sequatur naturam sui signi. Tunc facta multiplicatione, ut dictum est, singula producta singulis sunt æqualia & ejusdem naturæ; sed signa erunt contraria, quia BP & A^2 habent contraria, atque ita rursus tollent se invicem omnes affectiones, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut proponitur.

In exemplo proponatur, ut in secunda propositione primi capitis cubicarum, $BP + A^2 \propto O$. Ita ut BP sit suprâ, at A^2 infrâ, & ambo æqualia, ducatur autem hæc affectio in hanc aliam, cujuscumque sit valoris $C - A$ oriatur manifestò $BP C - B P A + CA^2 - A^3$, sed ita ut $+ B P C - B P A$ fiat speciatim ex ductu BP in $C - A$; at $+ CA^2 - A^3$ fiat ex A^2 in $C - A$. Quia ergo $+ B P$ ducitur in $+ C$ & producit $B P C$, & $+ A^2$ ducitur in idem C & producit CA^2 , sunt autem æqualia BP & A^2 , atque idem possident signum, erunt æqualia producta $B P C$, idemque signum possidebunt; at quia diversa sunt naturæ BP & A^2 , illud scilicet BP sequitur eandem sui signi naturam, hoc verò A^2 contrariam; idem ergo eorum productis accidet, ut alterum eandem sui signi naturam, alterum verò contrariam sequatur: tollent igitur se invicem $+ B P C$ & $+ CA^2$.

CA². Eadem ratione quia BP & A^2 æqualia sub eodem signo, sed diversæ naturæ ducuntur sigillatim in A & produciunt— $BP A - A^3$, erunt hæc producta æqualia & sub eodem signo, sed diversæ naturæ; ipsa ergo tollent se invicem, unde tota æquatio nihilo æquivalet. Nec erit difficile simili argumento uti in quibuscumque æquationibus, semper enim singulæ affectiones singulis erunt æquales, quia fient ex æqualibus in eandem: at vel signa erunt eadem & natura contraria, vel natura erit eadem & signa contraria; sicque tollent se invicem singulæ affectiones, & tota æquatio nihilo æquivalet.

Quinta.

OPERÆ etiam pretium est scire quot modis complicari possint affectiones speciales, ut ex iis affectiones universales oriantur ad condendas æquationes omnium potentiarum quadraticarum, cubicarum, quadratoquadraticarum, quadratocubicarum &c.

Ad hoc autem habenda primum est ratio numeri graduum ex quibus ipsa potentia componitur: nam quot modis potentia ipsa ex suis gradibus gigni poterit, tot modis complicari poterunt affectiones speciales ad condendam æqualitatem. Sic latus per se, latus tantum est. Planum fit vel per se, vel ex duobus lateribus. Solidum fit vel per se, vel ex plano & latere, vel ex tribus lateribus. Planoplanum fit vel per se, vel ex solido & latere, vel ex duobus planis, vel ex plano & duobus lateribus, vel ex quatuor lateribus. Planosolidum fit vel per se, vel ex planopiano & latere, vel ex solido & plano, vel ex solido & duobus lateribus, vel ex duobus planis & latere, vel ex plano & tribus lateribus, vel ex quinque lateribus. Solidosolidum fit vel per se, vel ex planosolido & latere, vel ex planopiano & plano, vel ex plano-

plano & duobus lateribus, vel ex duobus solidis, vel ex solido & plano & latere, vel ex solido & tribus lateribus, vel ex tribus planis, vel ex duobus planis & duobus lateribus, vel ex plano & quatuor lateribus, vel ex sex lateribus. Atque eodem modo & ordine in infinitum.

Secundo habenda est ratio affectionum specialium ex quibus totalis gignitur: nam ex illis quædam aliquando per se æquationem aliquam constituunt, quæ de unico, vel etiam de pluribus lateribus explicabilis est, omnino autem quævis æquatio superioris ordinis formari potest ex duabus, vel pluribus æquationibus inferiorum ordinum in se ductis, atque id tot modis, quot jam diximus potentias ex suis gradibus gigni posse. Exempli gratia, æquatio cubocubica potest formari ex quadratocubica ducta in lateralem, vel ex quadratoquadratica in quadraticam, vel ex quadratoquadratica & duobus lateribus, vel ex duabus cubicis, vel ex cubica in quadraticam & lateralem, vel ex tribus quadraticis & cat.

Hinc patet eò pluribus modis complicari posse affectiones speciales ad condendam æquationem aliquam, quò altior est illa æquatio, seu quò altior est illius potentia: atque ipsam altiore gigni posse ex omnibus inferioribus debite complicatis nullâ exceptâ, & præterea eandem per se ipsam constitui aliquando nullo inferiorum habito respectu.

Sexta.

ILLUD autem notatu dignissimum est, quamcumque æquationem de tot lateribus explicabilem esse, quot sunt illa de quibus explicari possunt omnes affectiones, seu æquationes speciales à quibus illa producta est. Immo & latera illius lateribus illarum singula singulis esse æqualia sive potius eadem; atque adeò ejusdem affectionis & naturæ.

Exempli gratia æquatio lateris ut $B - A \propto O$ de unico tantum latere supra explicabilis est, sicut & $C - A \propto O$. At ambæ invicem ductæ producunt quadraticam æquationem

$$\begin{aligned} & -BA \\ BC - CA + A^2 & \propto O: \end{aligned}$$

Quæ de iisdem duobus lateribus supra est explicabilis.

Rursus si hæc æquatio quadratica ducatur in hanc lateralem $D + A \propto O$; quæ de unico latere infra explicari potest, producet hanc æquatio cubica.

$$\begin{aligned} & -BDA - DA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 & \propto O \\ +BCA + DA^2 \end{aligned}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus explicabitur, duobus quidem supra, altero verò infra.

Eodem modo si ipsa æquatio cubica ducatur in aliam lateralem de unico latere explicabilem, producet æquatio quadratoquadratica, quæ de quatuor lateribus explicari poterit.

Item hæc æquatio cubica $Z^f - SPA - A^3 \propto O$.

De unico tantum latere supra est explicabilis

$$\text{Hæc quadratica } BP - RA - A^2 \propto O$$

De duobus, altero supra, & altero infra: his ergo duabus æquationibus in se invicem ductis fiet hæc quadrato-cubica

$$\begin{aligned} & -BPSPA + RSPA^2 - BPA^3 \\ BPZ^f - RZ^fA - Z^fA^2 + SPA^3 + RA^4 - A^5 & \propto O \end{aligned}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus, duobus quidem supra, & tertio infra, est explicabilis, atque ita de reliquis.

Cum verò quædam æquatio per se ipsam constituitur,

R ij

nec constare potest ex ductu duarum aut plurium inferiorum, tunc illam de unico tantum latere contingit explicari posse, quales sunt omnes illæ irregulares de quibus diximus supra cap. 2^o & 3^o cubicarum.

Præterea si accadat omnia latera alicujus æquationis esse fictitia, & impossibilia, ejusmodi æquatio in quamcumque aliam ducta tertiam producet, quæ de lateribus secundæ æquationis tantum explicabilis erit; quod si etiam secundæ illius latera omnia fictitia sint, quæ ex ambobus primâ scilicet & secundâ oritur æquatio, habebit latera omnia fictitia, & impossibilia. At si duarum priorum æquationum latera quædam fictitia sint & quædam positiva, tunc æquatio quæ ab ipsis duabus producitur, tot latera habebit positiva, quot in duabus à quibus producta est, reperiuntur. Cætera erunt etiam fictitia.

In exemplo esto hæc æquatio quadratica

$$ZP - RA + A^2 \propto O.$$

& intelligatur ZP majus esse quam $\frac{1}{4} R^2$ unde duo latera de quibus aliàs explicabilis esset ipsa æquatio, sunt fictitia: esto quoque hæc æquatio lateralis $B - A \propto O$ de unico latere supra explicabilis, ducanturque in se invicem æquationes ipsæ, unde producetur hæc æquatio cubica.

$$\begin{aligned} & -BRA + BA^2 \\ ZPB - ZPA + RA^2 - A^3 \propto O. \end{aligned}$$

Quæ quidem æquatio de unico tantum latere supra est explicabilis, reliqua duo sunt fictitia.

Corollarium.

EX hac nota intelligi potest methodus, quâ dignoscitur ci poterit num æquatio proposita habeat quædam latera fictitia, an verò omnia sint positiva, an etiam omnia fictitia; illud autem aliquando & longissimæ & difficillimæ indagationis est, præcipuè in æquationibus ultra cubum elatis & multipliciter affectis. In universum autem considerandum erit quot modis æquatio proposita ex aliis inferioribus produci poterit, habitâ ratione formulæ, & quot modis accidere poterit ut illæ inferiores habeant latera, vel fictitia, vel positiva, quidve tam hæc, quàm illa efficiant, dum inter se multiplicantur: nam hoc intellecto, dum proponetur illa æquatio, examinandum erit num id illi conveniat, quod à parte laterum fictitiorum produci debuit, num vero id quod à parte laterum positivorum exempli gratia, propositâ hac æquatione cubicâ

$$C^f. — DPA + FA^2 — A^3 \propto O.$$

Cujus formula similis est ei quam sub finem notæ sextæ adduximus, patet eam produci potuisse à duabus, alterâ planâ, sub hac formula

$$ZP — RA + A^2 \propto O$$

Altera autem laterali sub hac formulâ $B — A \propto O$. Unde æquationis productæ formula est hæc, quæ etiam ibi adducta est.

$$\begin{aligned} & — BRA + BA^2 \\ ZPB — ZPA + RA^2 — A^3. \end{aligned}$$

Conferantur ergo inter se singula homogenea amborum ipsarum æquationum, scilicet C^f . cum ZPB , item

R iij

DE cum ambobus simul BR & ZP , & longitudo F , cum ambabus B & R : his enim collatis si reperiatur ZP majus esse quàm $\frac{1}{4}R^2$, concludemus latera æquationis planæ fuisse ficticia atque adeo & eadem, in æquatione cubica, ficticia esse. Quod si ZP non sit majus quàm $\frac{1}{4}R^2$, erunt in utraque æquatione latera positiva. Verùm tota difficultas consistit in modo & ratione examinandi: hîc enim in exemplo, videndum esset, num longitudo F sic dividi possit in duas partes, quæ referant B & R , & rectangulum sub ipsis demptum ex DP relinquat $\frac{1}{4}$ quadrati alterutrius partium, puta ipsius R . Ac præterea C^f applicatum ad reliquam partem exhibeat idem $\frac{1}{4}R^2$, hoc enim casu æquatio proposita explicabilis erit de tribus lateribus, duobus quidem æqualibus, tertio verò utcumque, & ambo æqualia simul æquivalent primæ portioni ipsius F , puta ipsi R , eritque hic casus minoris majorisve determinationis.

Aliter, quod tamen eodem recidit, dividatur longitudo F , sic ut rectangulum sub partibus unâ cum $\frac{1}{4}$ quadrati unius portionum æquale sit DP , est autem hujusce divisionis problema planum de duobus lateribus explicabile, & determinationi obnoxium, ac tunc si divisio fieri non possit, statim pronunciare licet æquationis planæ latera fuisse ficticia. Si autem divisio fieri possit, sitque ipsa maxima eademque unica, cum scilicet altera pars ipsi B correlata, erit $\frac{1}{3}F$, altera autem ipsi R correlata, erit $\frac{2}{3}F$, tunc nisi C^f sit præcise $\frac{1}{27}F^3$ erit rursus æquatio plana, ficticia: existente autem C^f æquali ipsi $\frac{1}{27}F^3$, erit tunc casus majoris determinationis, de qua dictum est propof. prima, cap. 1 cubicarum. At verò si facta divisione longitudinis F ut dictum est, non incidamus in maximam, cum scilicet portio ipsi B correlata non erit $\frac{1}{3}F$, sed major, vel minor (duplex enim hoc casu contingere potest solutio.) tunc

si ductâ alterutrâ ex iis duabus partibus quæ ipsi B correlatæ sunt, in $\frac{1}{4}$ quadrati alterius sibi congruentis, fiat solidum aquale ipsi C^f , habebitur casus minoris determinationis, in quo tria latera erunt positiva, duo quidem æqualia, ad æquationem quadraticam pertinentia, quorum summa erit illa portio longitudinis F, quæ ipsi R correlata est; & tertium singulis productis inæquale, quod ad æquationem lateralem pertinebit, eritque tertium illud portio ipsi B correlata. Quòd si ex duobus illis solidis quæ hac ratione fieri possunt, (videlicet ob duplicem solutionem, quæ contingere potest, divisa longitudine F, ut proponitur) neutrum æquale reperiat, sit autem hoc C^f , maximo prædictorum minus, minimo majus: tunc tria æquationis latera erunt positiva, sed inæqualia. Si tandem C^f , vel maximo prædictorum majus, vel minimo minus extiterit, hoc casu erunt duo illa latera fictitia quæ ad æquationem planam pertinebunt, ac solum reliquum illud erit positivum, quod æquationis lateralis proprium erit.



DE GEOMETRICA

PLANARUM ET CUBICARUM

ÆQUATIONUM RESOLUTIONE.

ÆQUATIONEM Geometricè resolvere, est invenire Geometricè omnia latera de quibus ipsa æquatio explicabilis est.

Inventio autem ejusmodi laterum dicitur esse Geometrica, cum illa deducitur ex locis propriis secundum Geometriæ leges descriptis, atque inter se certo ac legitimo modo compositis; ita ut ex ipsorum locorum sectione vel tactione, lineæ quædam rectæ deducantur quæ latera quæsita exhibeant.

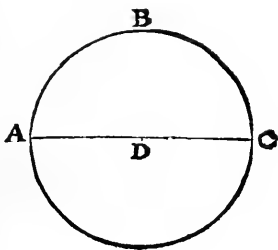
Quoniam verò ista laterum inventio pendet à locis Geometricis, non abs re fuerit aliqua de ipsis locis præmittere, tum circa eorum naturam atque constitutionem, tum etiam circa eorundem divisionem, ac diversos gradus; ut quæ simpliciora sunt, à magis compositis distinguantur.

Locus ergo Geometricus in univèrsum, est magnitudo quædam ex qua deduci possunt quocunque aliæ magnitudines secundum eandem atque uniformem quandam legem, quæ eandem aliquam atque uniformem sortiantur proprietatem.

De locis ejusmodi complures libros antiqui conscribere, quorum numerum & titulos apud Pappum Alexandrinum legere licet; sed illi temporis injuria, summo rei literariæ detrimento, perierunt. Neque nos eorum instaurationem hic intendimus, quia ad nostrum institutum,

tutum, paucis iisque non admodum difficilibus, ege-
mus. Non abs re tamen fore judicavimus selectiores ali-
quot ex illustrioribus locis in exemplum hic afferre,
quò eorum natura & constitutio magis eluceat. Nec
ultra constructionem seu compositionem ipsorum pro-
grediemur: demonstrationem autem, quia plerumque
nimis longa est, ad eam partem Geometriæ quæ talem
materiam tractare debet, remitemus.

In primo ergo exemplo. Esto quævis circuli circum-
ferentia ABC, cujus cen-
trum sit D; manifestum est
ergo rectas omnes ab ipsa
circumferentia ad centrum
D ductas esse æquales. Ita-
que ex præmissa loci defi-
nitione, circumferentia illa
locus est; quandoquidem ea
magnitudo est ex qua de-
ductæ quotcumque aliæ ma-
gnitudines, lineæ rectæ sci-
licet, secundum eandem at-
que uniformem legem, puta quæ ad idem centrum D
tendant, eandem aliquam atque uniformem sortiuntur
proprietaem, ut scilicet omnes sint inter se æquales.

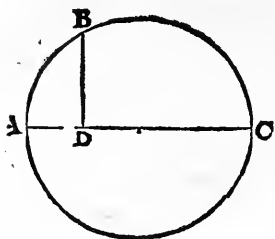


Geometriæ autem, cum magnitudinem aliquam ad
quendam locum referre volunt, primùm magnitudinis
istius genus ac speciem, deinde ejusdem conditiones ex-
primunt, ac tandem locum ipsum enuntiant, addito mo-
do quo ipsa magnitudo ad prædictum locum refertur.

In exemplo ergo præmissa sic illi loquerentur. Si ab
aliquo puncto educantur quotcumque rectæ, quæ uni-
eidemque rectæ sint æquales, erit alterum cujusvis edu-
ctæ extremum ad circuli circumferentiam.

In altero exemplo. Esto quævis circumferentia cir-
Rec. de l'Acad. Tom. VI. S

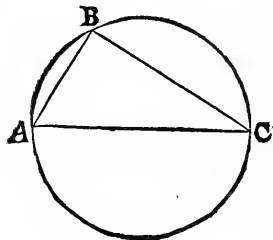
culi ABC, cujus diameter sit AC, atque in ea diametro



statuatur punctum quodvis D, à quo erecta ad diametrum perpendicularis recta DB, terminetur ad circumferentiam in B: erit ergo hæc BD media proportionalis inter diametri portiones AD, DC; unde ipsa circumferentia, rursus alio respectu locus erit, quippe ad medias proportionales.

Phrasis Geometrica hujus loci talis esset. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, si inter terminos illius sumatur quodvis punctum, à quo educatur ad rectos angulos ipsi rectæ quævis alia recta, quæ inter prioris rectæ portiones media proportionalis existat, erit alterum eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

In tertio exemplo. Esto adhuc quævis circumferentia

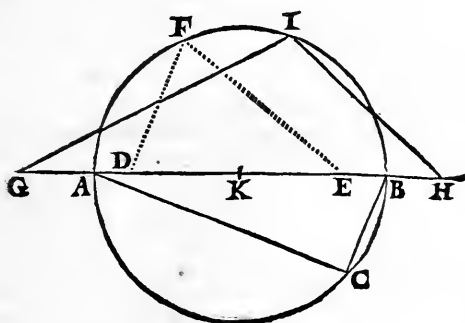


circuli ABC, atque in ea rectâ quædam AC quæ subtendat arcum ABC utcunque; atque in eo arcu, sumpro quovis puncto B, ducantur rectæ BA, BC ad ejusdem arcus sive chordæ ipsius extrema: manifestum est angulum ABC æqualem esse omni alii angulo qui in eadem portione ABC existet. Manifestum est quoque potuisse super rectam

AC constitui portionem circuli ABC, quæ cujuscunque anguli ABC capax esset; unde circuli portio ABC hoc respectu locus erit; quippe ad angulos æquales.

Phrasis Geometrica hæc erit. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, & exposito quovis angulo rectilineo : si à rectâ lineâ terminis ad aliquod punctum inclinentur duæ aliæ rectæ quæ angulum exposito æqualem contineant : erit hoc punctum, sive vertex anguli, ad alicujus portionis circuli circumferentiam.

In quarto exemplo. Est ut suprà quivis circulus cujus diameter AB; atque ex punctis A, B, ducantur ad quodvis punctum C in circumferentia existens, rectæ AC, BC. Patet ergo ambo simul quadrata AC, BC



æqualia esse quadrato diametri AB, ac proinde ipsam circumferentiam locum esse ad summam duorum quadratorum uni eisdemque quadrato semper æqualem.

Atque etiam si assumpta puncta non sint ipsa A, B, sed alia duo quæcunque in rectâ AB etiam productâ, si libuerit, modò ipsa puncta à centro K hinc inde æqualiter distent, vel intra circulum, qualia sunt D, E; vel extra, qualia sunt G, H; ducanturque ad quodvis circumferentiæ punctum F vel I rectæ DF, EF; vel rectæ
S ij

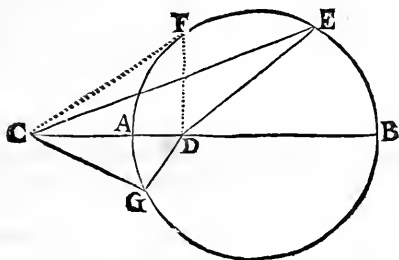
GI, HI; semper ambo quadrata DF, EF simul sumpta uni eidemque spatio erunt æqualia, nempe summæ amborum quadratorum DB, BE, vel summæ amborum EA, AD: similiter ambo quadrata GI, IH simul sumpta, uni eidemque spatio æqualia erunt, nempe summæ amborum quadratorum GB, BH, vel summæ amborum HA, AG. Hinc ergo circumferentia illa, lato illo respectu, locus erit ad summam duorum quadratorum uni eidemque spatio semper æqualem.

Phrasis Geometrica. Rectâ lineâ quâcunque expositâ, signatisque in ea utcumque duobus punctis, si ab ipsis punctis ad tertium quodpiam punctum duæ rectæ inclinentur, & sint species quæ ab ipsis fiunt simul sumptæ exposito alicui spatio æquales, tertium illud punctum erit ad alicujus circuli circumferentiam.

Species dicunt Geometræ, non quadrata; ut indicent hoc universaliter verum esse, non de quadratis modò, sed etiam de figuris similibus, similiterque super rectis de quibus agitur descriptis. Quod enim de quadratis verum est, idem quoque de ejusmodi figuris verum esse omnino constat. Immodò, si assumpta puncta in superiori quarto exemplo plura sint quàm duo, sive omnia in eadem recta existant, sive non, quicumque tandem sit illorum numerus, & quæcunque positio; atque ab iisdem punctis ad aliud quoddam punctum totidem rectæ ducantur, singulæ scilicet à singulis punctis, & omnium ipsarum rectarum species simul sumptæ alicui spatio sint æquales: erit illud aliud punctum ad circuli circumferentiam. Dabitur quippe circulus quispiam in cujus circumferentia sumpto quovis puncto, atque ab eo ad omnia puncta primò posita ductis totidem rectis, erunt harum omnium ductarum species simul sumptæ eidem spatio æquales: quo quidem respectu circumferentia illa erit locus, qui omnium locorum planorum elegantif-

simus jure cenferi possit; sed illius, sicuti & aliorum discussio specialior, ad specialem de locis tractatum pertinet, nos autem hic ad generalem quandam locorum notionem attendimus.

In quinto exemplo. Esto item circulus, cujus diameter AB, quæ producaturs versus A extra circulum utcumque in C; & ducatur recta CF tangens circulum in F, à quo demittatur in diametrum perpendicularis FD. Itaque erit ut CA ad AD, ita CB ad BD. Jam in cir-



cumferentia sumatur quodvis punctum E, vel G &c. à quo rectæ ducantur EC, ED, vel GC, GD &c. erit sanè semper EC ad ED, vel GC ad GD, vel etiam FC ad FD &c. ut CA ad AD, vel ut CB ad BD; ut hoc respectu circumferentia AFEBG sit locus nobilissimus ad binas & binas rectas in eadem ratione existentes.

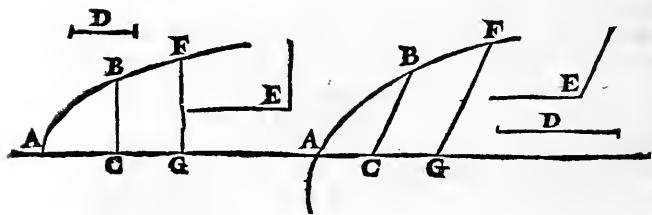
Phrasi Geometricâ. Si à duobus punctis C, D, ad idem aliud punctum E duæ rectæ inelinentur CE, DE, in data ratione inæqualitatis existentes: erit tertium illud punctum E ad cujusdam circuli circumferentiam.

Omnino, quot proprietates habet magnitudo aliqua, modò proprietates ipsæ magnitudini convenient, non

autem punctis quibusdam tantum numero definitis: tot modis ipsa magnitudo locus esse potest; ita ut si infinitæ numero sint tales proprietates ad aliquam magnitudinem pertinentes, etiam infinitis modis, talis magnitudo locus esse possit. Sed & uniuscujusque modi locus denominationem sortietur à proprietate illa, respectu cuius ipse locus est.

Sic, in quinque allatis exemplis, propter quinque nobilissimas circuli proprietates, quinque etiam modis circumferentia illius locus esse ostenditur. At cum innumeræ aliæ sint ipsius circularis figuræ proprietates, quarum unaquæque in suo genere eximia est, sequitur ut innumeris etiam modis circumferentia circuli locus esse queat: at nos quid sit locus Geometricus indicare tantum atque exemplis quibusdam illustrare decrevimus, non autem integrum eorum tractatum instaurare: itaque paucis aliis exemplis alterius generis locorum ad præcedentia additis, ad id quod propositum est accedemus.

In sexto ergo exemplo. Esto parabola AB, cujus dia-



meter sit AC, vertex A, atque ad diametrum ordinatim applicata sit quævis recta BC, & latus rectum ponatur esse D. Notum est ergo ex conicis, quadratum rectæ BC æquale esse rectangulo contento sub latere

recto D, & sub rectâ AC, quæ ex diametro inter verticem A & applicatam BC intercipitur, sive diameter illa sit axis, sive alia quæcunque. Itaque ordinatim applicata BC, quæcunque illa, sit media proportionalis est inter latum rectum D & portionem diametri AC. Ac proinde parabola quævis locus esse potest ad medias proportionales, quarum altera extremarum sit semper eadem.

Phrasi Geometricâ. Rectâ lineâ quacunque expositâ AC quæ indefinita sit, atque signato in ea quocunque puncto A; item aliâ rectâ quavis D, longitudine datâ, & dato angulo quocunque E, si in priori recta sumatur quodcunque punctum C ad unas partes ipsius A, & educatur recta CB in angulo ACB qui æqualis sit angulo E, & punctum B sit semper ad unas partes rectæ AC, ipsa autem BC media sit proportionalis inter expositam D & portionem AC: erit punctum B ad parabolam.

Quod si plures sint in eadem parabola ordinatim ad eandem diametrum applicatæ, putâ BC, FG, inter quas à vertice A interceptæ sint portiones diametri AC, AG: erunt hæ portiones AC, AG, inter se longitudine, ut applicatæ potentiâ; hoc est, erit quadratum BC ad quadratum FG ut recta AC ad rectam AG; quo pacto parabola erit locus ad quadrata rectis lineis proportionalia, quod satis ex dictis patet.

In septimo exemplo. Esto rursus parabola BAC, cujus diameter AD, atque ad ipsam diametrum ordinatim applicata sit recta BDC; sumpto autem in ipsa parabola quovis puncto H, ducatur recta HE parallela diametro AD, occurrens ipsi BC in puncto E. Erat ergo ut recta AD ad rectam HE, ita rectangulum BDC ad rectangulum BEC. Similiter, sumpto in eadem parabola alio quovis puncto I, & ductâ rectâ IF parallelâ ipsi AD vel HE, erit quoque recta AD ad rectam IF,

Nec ideo phrasis Geometrica à præcedenti diverſa eſt, niſi in eo tantùm quod rectæ KL , AD , ſunt ad diverſas partes ipſius BC ; quandoquidem ſic exigit loci natura.

Neque etiam refert an rectæ AD , HE , IF , KL , &c. ſint perpendiculares ipſi BC , vel ad illam obliquæ; hoc enim vel illo modo ſemper verum erit quod proponitur.

In octavo exemplo. In alterutra figurarum præcedentium ponatur recta AD eſſe axis parabola, ad quam ideo perpendicularis ſit ordinatim applicata BC , exiſtentibus angulis ADB , ADC rectis; ſitque in axe AD producto, ſi opus ſit, focus G , à quo ad puncta H, I, B, L , &c. quæcunque in parabola exiſtunt, ducantur totidem rectæ GH , GI , GB , GL , & reflectantur alia rectæ HE , IF , LK ad quamvis ordinatim applicatam BC quantum ſatis productam, perpendiculares: tunc verò (eximia ſanè parabola proprietas) quævis ducta GH cum ſua reflexa HE , æqualis erit cuivis alii ductæ GI cum ſua reflexa IF &c. Siquidem reflexæ ipſæ reſpectu ipſius BC , omnes ſint ad partes verticis A , & ſumma cujuſvis talis ductæ cum ſua reflexa, putà ſumma GHE , æqualis erit ſummæ ambarum GAD , ſive uni rectæ GB quæ ſola ducta eſt, cui nulla convenit reflexa reſpectu ordinatæ BC . Quòd ſi ductæ quædam, ut GL &c. ſuas reflexas LK &c. habeant ad alteras partes verticis A reſpectu ordinatæ BC : tunc differentia inter ductam GL & reflexam LK æqualis eſt eidem GB . Erit ergo parabola locus ad quocunque rectas ab eodem puncto ductas, atque à parabola ad eandem aliquam aliam rectam perpendiculariter reflexas, ita ut ſumma vel differentia cujuſvis ductæ & ſuæ reflexæ æqualis ſit alicui datæ rectæ lineæ.

Phraſi Geometricâ. Expoſitâ quæcunque rectâ lineâ indeterminatâ BC , ſignatiſque in ea duobus punctis B ,

C, atque ad eandem erectâ perpendiculari rectâ quâdam longitudine datâ AD, existente puncto D in ipsa BC; sumpto etiam quocunque puncto G in eadem AD: si ductâ quâcunque rectâ GH ad partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum E inter puncta B, C, summa ambarum GHE æqualis sit datæ alicui rectæ: vel si ductâ quâcunque rectâ GL ad alteras partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum K ultra puncta B, C, differentia ambarum GL, LK, æqualis sit datæ alicui rectæ, ei scilicet cui summa GHE æqualis est: punctum reflexionis H, vel L, erit ad parabolam cujus ipsum punctum G erit focus; recta AD, axis; & recta AG erit quarta pars lateris recti.

Talis verò locus parabolicus ad specula ustoria pertinet. Nam si assumatur pars concava BAC, & radii solis sint rectæ, FI, EH, &c. qui ad sensum sunt paralleli; illi ad puncta I, H, &c. reflectentur à forma parabolica, & reflexi concurrent ad focum G; ubi si speculum sit fatis amplum, & sol in debita dispositione, intensissimus calor excitabitur. Hoc autem idèd fit, quia si per punctum I duceretur recta parabolam tangens, tunc rectæ FI, GI, ad ipsam tangentem angulos æquales constituerent: eorum autem angulorum alter esset angulus incidentiæ alter autem angulus reflexionis, atque ita de reliquis ad alia puncta H, &c. pertinentibus.

Quod si candela in puncto G constitueretur, ejus radii GH, GI, &c. post reflexionem à speculo fierent paralleli, putà HE, IF, &c. atque ita lumen candelæ longissimè produceretur; sed hæc sunt alterius loci.

Nono exemplo. Esto ellipsis vel hyperbola, cujus axis sit AB, centrum C, vertices autem sint A & B, & foci D, E, quorum D propior sit vertici A, at E sit propior vertici B; atque in sectione sumatur quodvis punctum

Nec phrasis Geometrica difficilis est, modò quis ea quæ superius exposita sunt imitari voluerit.

Si AB sit axis, sitque ipsi æquale latus rectum I, vel rectangula ad quadrata sint in ratione æqualitatis: tunc loco ellipsis habebimus circulum, ut in secundo exemplo. At non mutabitur hyperbola, nisi specie tantum, illa enim in genere semper erit hyperbola; sed hoc casu æqualitatis, asymptoti illius erunt inter se ad angulos rectos, cum in ratione inæqualitatis illæ asymptoti sint ad angulos obliquos; sed hæc omnia ex conicis manifesta sunt.

Undecimo exemplo. Esto quæcunque sectio conica, cujus axis AB, vertex A & focus B; atque producto utrinque axe, sumatur in eo ultra verticem punctum C, ita ut, in parabola quidem, recta AB æqualis sit rectæ AC, in hyperbola verò ipsa AB major sit quàm AC, in ea scilicet ratione quam habet distantia focorum ad longitudinem axis inter vertices sectionum oppositarum intercepti; at in ellipsi, AB minor sit quàm AC, in ea rursus ratione quam habet distantia focorum ad axem ellipsis inter vertices interceptum.

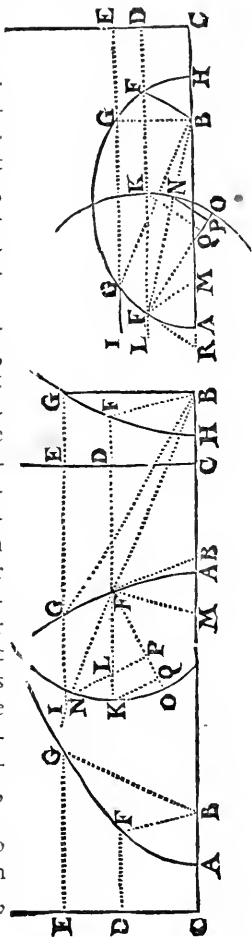
Hæc autem utraque ratio est ea quam in figuris noni exempli habet recta DE ad rectam AB; tum ex C excutetur CD perpendiculariter ad CB, eademque CD indefinitè utrinque producat. His positis, sumantur in sectione quotcunque puncta F, G, &c. à quibus ducantur totidem rectæ DF, EG, &c. ipsi BC parallelæ quæ occurrant rectæ CD in punctis D, E, &c. ac tandem jungantur rectæ BF, BG, &c. ac tunc erit ut BA ad AC, ita BF ad FD, vel BG ad GE, atque ita de reliquis: unde quævis trium illarum sectionum locus est ad pulcherrimam illam proprietatem.

Phrasi Geometrica. Expositis duabus rectis CB, CD ad angulum rectum constitutis, signato in altera illa-

rum unico puncto B, quod à puncto C diverfum fit, in altera verò fumantur quoruncunq; puncta D, E, &c. à quibus ductæ sint rectæ FD, GE, &c. ipsi CB parallelae, quæ in punctis F, G, &c. inclinentur ad punctum B, & sint rationes BF ad DF, BG ad EG, &c. omnes inter se eadem: puncta F, G, &c. erunt omnia in una eademque sectione conica, cuius punctum B focus erit.

Hujus propositionis, in parabola quidem, unicus est casus, quia in ea unicus est focus, & vertex unicus; at in hyperbola atq; in ellipsi, quia in utraque duplex est focus, B, M, & vertex duplex A, H: ideò in unaquaque ex illis sectionibus, quadruplex est casus, duo quidem respectu unius focorum propter duplicem verticem, & duo respectu alterius focorum propter eundem duplicem verticem. At quoniam id quod de uno ex istis focus verum est, verum quoque est de altero similiter considerato; ideò ad explicandos istos casus sufficiet, si unum focorum, putà B, assumpserimus.

Ille ergo focus B necessario propior est uni verticum quàm alteri. Estò vertex propior H,



remotior autem esto A. Itaque, sive puncta F, G, &c. sint prope verticem remotiorem A, sive eadem puncta F, G sint prope verticem propiorem H, semper vera est propositio, nempe BF rectam esse ad rectam FD sibi conterminam ad punctum F, ut recta BG ad rectam GE sibi conterminam ad punctum G. Hinc verò quædam deduci possunt consequentiæ quæ apud Apollonium in suis conicis non reperiuntur, nec tamen forsan illis cedunt quas ipse habet ibidem, qualis est hæc. In hyperbola, summa ambarum BF, BF, suprà diversos vertices A, H tendentium, & ad eandem rectam FF axi AH parallelam pertinentium, se habet ad ipsam FF, ut recta BM, quam distantiam focorum esse supponimus, ad axem AH. In ellipsi, differentia earundem BF, BF, ad eandem FF, se habet ut distantia focorum BM ad axem AH; ac proinde in hyperbola, summa ipsarum BF, BF est ad summam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG. In ellipsi, differentia ipsarum BF, BF est ad differentiam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG; atque ita de multis aliis quas consultò omittimus, quia id tantum, quid sit locus geometricus, declarare, atque exemplis quibusdam illustrare intendimus.

Illud tamen minimè prætereundum putamus quod ad Dioptricam pertinet, nec ita pridem innotuit, nempe talem proprietatem sumptam in ratione inæqualitatis, ad refractiones pertinere, atque illis esse specificam, ad hoc ut radii omnes qui ante refractionem erant ejusdem ordinis (hoc est vel paralleli, vel ad idem punctum inclinati, sive illi ad ipsum punctum tendant, sive ab eo divergant) iidem post refractionem fiant adhuc ejusdem ordinis, qui tamen ordo diversus sit à priori. Et conver-tendo. Si superficies quædam refractiva talis sit, ut qui ante refractionem ejusdem ordinis erant radii, iidem post refractionem sint adhuc ejusdem ordinis, sed ab

ordine priori diversi : fiet necessariò ut tali superficiei talis conveniat proprietas , quam in hoc undecimo exemplo sectionibus conicis convenire diximus , in ratione tamen inæqualitatis.

Hic verò in universum tres sunt casus. Primus est , cùm radii qui ante refractionem erant paralleli , post refractionem fiunt adhuc paralleli , sed diverso à priori parallelismo ; qui quidem casus ad sola refractiva plana pertinet , nec admodum utilis est. Secundus casus est , cùm radii qui ante refractionem erant paralleli , post refractionem ad idem punctum inclinantur ; vel contrà , qui ante refractionem ad idem punctum inclinabantur , pòst fiunt paralleli ; qui casus ad ellipsim pertinet atque ad hyperbolam , quibus proprietas illa convenit in ratione inæqualitatis , non autem ad parabolam , cui ipsa convenit in ratione æqualitatis. Tertius casus est , cùm radii qui ante refractionem ad unum punctum inclinabantur , post refractionem ad unum aliud punctum inclinantur ; qui casus aliquando ad superficiem sphericam pertinet , sed in aliquo tantùm casu admodùm particulari , aliàs enim ac multò magis universaliter , ipse pertinet ad alias superficies de quibus in exemplo sequenti dicturi sumus.

Quomodò autem secundus casus ad ellipsim pertineat vel ad hyperbolam , aut , quod universalius est , ad superficiem spheroidis vel conoidis hyperbolici , quæ superficies ab ipsis ellipsi vel hyperbolâ circa suos axes conversis gignuntur : non inutile erit hoc loco declarare. Posthàc enim , sequenti exemplo , quomodò tertius casus ad alias superficies pertineat , aperiemus .

In figura ellipsis vel hyperbolæ undecimi hujus exempli , sumpto in sectione quovis puncto F , quâ parte illa sectio magis distat à foco B , eademque vertici A propior est , & factâ constructione ut ibidem ; producat recta

DE ad partes F utcunque in L, tum circa axem AH intelligatur circumvoluta sectio, ut habeatur sphæroïdes, vel conoïdes hyperbolicum, ad cujus formam perficiatur perspicillum vitreum vel crystallinum, vel ex aliqua ejusmodi materia quæ aëre densior sit, & radios ab ipso aëre in eandem obliquè incidentes refringat; & ratio inter aërem & talem materiam, quòd ad rarefactionem & condensationem spectat; sive, ut vulgò jam loquimur, ratio refractionis inter aërem & ipsam materiam, eadem sit ei rationi quæ est inter rectas BA, AC; sive inter rectas AH, BM, conferendo semper majorem terminum rationis ad minorem, dum confertur corpus rarius ad densius: (quid sit autem ratio refractionis inter duo corpora diversæ densitatis, jamjam explicabimus:) dico quod in tali perspicillo, si radius incidentiæ sit LF, qui axi AH parallelus est, idemque progrediatur ab L ad F, frangetur radius ille in F, & fractus inclinabitur ad punctum B. Quòd si radius incidentiæ sit BF progrediens à puncto B, ille frangetur in F, & post fractionem fiet radius FL axi HA parallelus. Nam in refractione, sicuti & in reflexione, progressus cujusvis radii, & regressus ejusdem, fiunt per easdem lineas: atque omninò quævis species visibilis cundo & redeundo idem servat iter.

Quoniam ergo ponimus superficiem sphæroïdis vel conoïdis hyperbolici, exhibere nobis perspicillum ipsum à quo radii refringuntur in ingressu vel in egressu ejusdem superfici; & superficies illa duplici modo accipi potest, primo quidem prout convexa est, ita ut convexitas pertineat ad corpus densius; secundo prout concava est, ita ut cavitas pertineat ad idem corpus densius: sciendum est nos de priori modo jam locutos esse: quòd si de secundo modo loquamur, contrarium accidet: nam si radius incidentiæ sit FF axi parallelus, atque

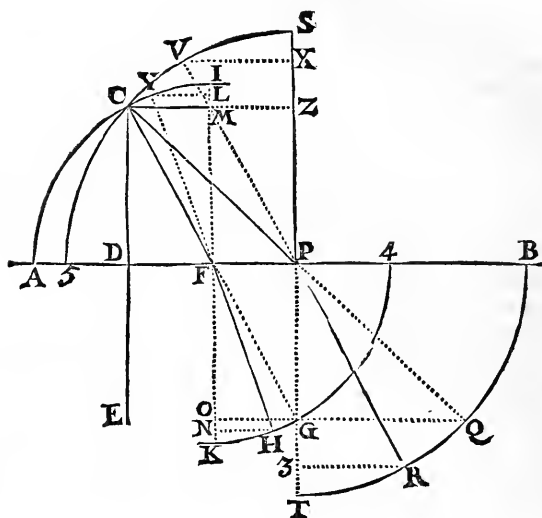
que ipse radius à parte foci remotioris B incidat in sectionem cujus vertex est A, is post refractionem in puncto F, fiet radius FI qui diverget tanquam si ab ipso foco remotiore B profectus sit, eritque in directum cum recta linea BF. Si autem radius incidentiæ sit IF, qui ad focum B inclinatur, is post refractionem fiet FF axi parallelus.

In his duobus modis manifestum est sphæroidem à conoïde hyperbolico in eò differre, quòd priori modo radius LF in conoïde sit intra densum corpus, & FB intra rarum; in sphæroïde autem, LF sit intra rarum & FB intra densum: at secundo modo, è contrario in conoïde radius LF sit in raro, & FB in denso; in sphæroïde autem, LF sit in denso, & FB in raro.

Jam quid sit ratio refractionis inter duo corpora diaphana diversæ densitatis, putà inter aërem & vitrum, sic explicabimus.

Estò AB superficies communis duorum corporum propositorum; sitque rarius, putà aër versùs partem superiorem C; densius autem, putà vitrum, sit versùs partem inferiorem E: & sumpto in rariori, quovis puncto C, progrediantur ab eo quotcunque radii CD, CF, CP &c. cadentes in superficiem AB in punctis D, F, P, &c. per quæ ingrediantur in vitrum: ex iis autem radiis, CD perpendicularis sit ad illam superficiem; ceteri autem obliqui, ita ut CF minùs obliquus sit quàm CP. Omnes ergo, præter CD frangentur in ingressu vitri; at CD solus rectà sine fractione transibit ad E. Jam cujusvis aliorum, putà ipsius CF, fractio sic se habebit. Centro F & intervallo FC describantur duo circuli quadrantes ACI quidem intra aërem, KG₄ autem intra vitrum, ita ut recta IFK sit diameter ad superficiem AB perpendicularis, & quadrantes habeant angulos AFI, KF₄ rectos, ad verticem oppositos; quo pacto illi jacebunt in eodem

154 DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM.
 plano, eruntque sibi invicem oppositi. Producatur in di-
 rectum recta CF intra vitrum usque ad circumferentiam
 quadrantis in G.



Si igitur radius CF fractus non esset in F, ille recta
 progrediretur in G; at propter fractionem fit contrà, ut
 deviet ab ipsa rectitudine CFG, fiatque CFH ex duabus
 rectis CF, FH angulum obtusum ad F constituentibus,
 sic ut intra aërem angulus inclinationis CFI major sit
 quàm angulus HFK qui est quoque angulus inclinatio-
 nis intra vitrum; hîc enim inclinationem radiorum
 mensuramus per angulos quos illi faciunt cum perpen-
 diculari erecta à puncto incidentiæ, & hi anguli respec-

Atque ejusdem radii fracti, majores sunt intra rarum quàm intra densum.

Præterea producat in directum recta HF ultra centrum F usque ad circumferentiam in Y; atque à quatuor punctis C, Y, G, H in circumferentia existentibus, cadant in rectam IFK totidem perpendiculares CM, YL, GO, HN, ex quibus duæ majores CM, GO inter se æquales erunt, sicuti & duæ minores YL, HN inter se. Ratio ergo quam habet utraque majorum ad utramvis minorum, ea est quam vocamus rationem refractionis ab aëre ad vitrum, putà ratio CM ad HN vel ad YL; & convertendo, ratio minoris ad majorem, putà HN ad CM vel ad GO, vocabitur ratio refractionis à vitro ad aërem; ac universaliter major ratio vocatur ratio refractionis à rariore ad densius; minor autem, ratio refractionis à densiori ad rarius.

Et hæc quidem ratio respectu duorum eorumdem corporum nunquam mutatur, sed eadem semper manet per omnes radiorum insuperficiem communem incidentium inclinationes, ut constanti experientiâ comprobatur: neque enim hoc, cum à corporum natura pendeat, aliter haberi potuit quàm ab experientia, ex qua tale Dioptricæ fundamentum longè præcipuum atque nobilissimum depromptum est.

Sed esto in eandem superficiem AB alius radius CP priori CF obliquior; ac centro P, intervallo PC describantur ut prius duo circuli quadrantibus CS, TQB prior in aëre, posterior in vitro, ambo ad verticem oppositi, atque in eodem plano jacentes, & communem diametrum habentes rectam SPT quæ ad planum AB perpendicularis existat; hic autem radius CP frangatur in P, & post fractionem abeat in R, ita ut angulus inclinationis CPS intra rarum major sit angulo inclinationis RPT intra densum; producatur quoque CP in di-

rectum in Q, & RP producat in directum in V, suntque puncta S, C, V, S, T, R, Q, B in eadem circuli circumferentia, in cuius diametrum SPT cadant quatuor perpendiculares CZ, QG, R₃, VX, quarum duæ majores CZ, QG sunt inter se æquales, sicuti & duæ minores R₃, VX inter se. Rursus ergo, ratio cujusvis majoris ex quatuor illis perpendicularibus ad quamvis minorem, putà ratio CZ ad R₃ vel ad VX, est ratio refractionis à raro ad densum; & ratio cujusvis minoris ad quamvis majorem, est ratio refractionis à denso ad rarum, putà R₃ ad CZ vel ad QG; & hæ rationes eadem sunt cum præcedentibus CM ad HN, vel HN ad CM, &c.

*Vide figuras
præcedentes
pag. 149.*

Tale autem fundamentum refractionis ad prædictas sectiones ellipsim & hyperbolam sic accommodatur. Sumpto in quavis illarum sectionum puncto F, & factâ constructione omnino ut supra, ac posito quòd sectionis species talis sit ut ratio axis AH ad distantiam focorum BM, sit ratio refractionis à raro ad densum in ellipsi, & à denso ad rarum in hyperbola, inter duo corpora proposita aërem & vitrum; ducatur recta FR quæ sectionem tangat in F; tum recta FO ipsi tangenti perpendicularis, atque adeo perpendicularis quoque ipsi sectioni, quæ quidem FO utrinque producat indefinitè, sed hoc loco speciatim, ad partes concavas sectionum; deinde centro F & intervallo quocunque FO, describatur circuli quadrans cujus arcus secet rectam FL in K, & rectam BF in N; & à punctis K, N in rectam FO deducantur perpendiculares KQ, NP: demonstrabitur ex natura conicorum, harum perpendicularium KQ, NP rationem eandem esse cum ratione axis AH ad distantiam focorum BM, ac proinde esse rationem refractionis inter duo corpora proposita aërem & vitrum. Posito ergo quòd LF in ellipsi, in hyperbola autem KF sit radius incidentiæ, erit FB radius refractionis; & contrà, si BF sit

radius incidentiæ, erit LF in ellipfi, & KF in hyperbola, radius refractionis.

Cætera quæ plurima sunt, minutatim persequi, Dioptrica sunt partes; nobis verò qui de locis agimus hoc ostendendum restat, cur tale argumentum, quod manifestò ad Dioptricam pertinet, hoc loco attigerimus.

Id ergo ostendere volumus, non solum in rebus purè geometricis locorum geometricorum vim cerni posse, sed etiam in aliis Matheseos partibus quæ objectum suum à Physica mutantur, modò talis objecti actiones per lineas geometricas producantur: quod sanè radiis specierum visibilibus accidere satis superque notum est. Idem autem in Mechanica locum faciliè habere ostenderetur; atque etiam in Astronomia: sed istam segetem, quia ad hanc materiam directè non spectat, alio tempore mendum relinquamus.

Porro, si quis phrasi dioptricâ uti voluerit in enunciando ejusmodi loco dioptrico, is hoc modo loqui poterit.

Si perspicilli alicujus superficies, radios omnes parallelos in eam incidentes sic refringat, ut ad idem punctum inclinentur: vel si omnes radios ad idem punctum inclinatorum, parallelos efficiat, talis superficies erit superficies sphaeroidis, vel conoidis hyperbolici, & punctum inclinationis erit focus ab ipsa superficie remotior, qui autem paralleli erunt radii, iidem & axi ipsius superficiei erunt paralleli, sed & axis ipse inter vertex interceptus, ad distantiam focorum eam rationem habebit quæ est ratio refractionis inter corpus ex quo fit illud perspicillum, & medium diaphanum per quod transeuntes radii in tale perspicillum incurrunt.

Duodecimo exemplo. Ostendamus quomodò tertius ille casus de quo undecimo exemplo locuti sumus, & quem hùc remisimus, aliquando ad superficiem sphæ-

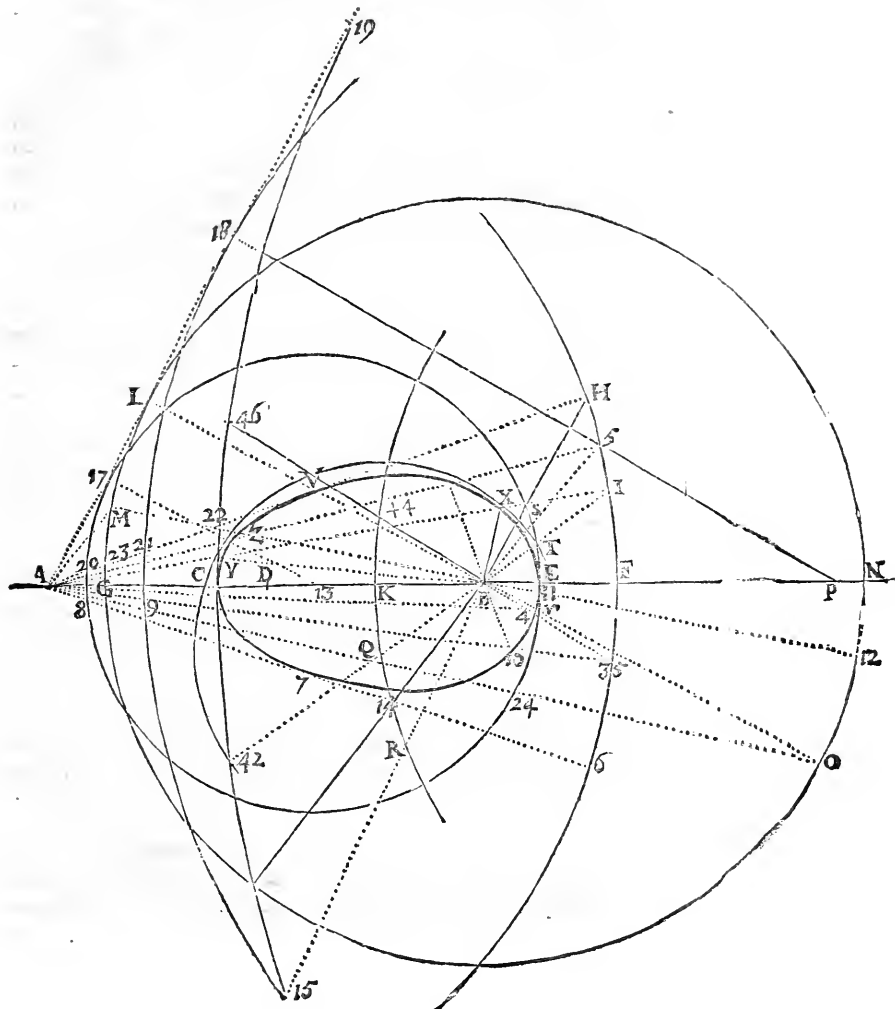
ricam, sed multò magis universaliter ad alias superficies pertineat, quas antiquis notas fuisse nullibi apparet.

Sunt ergo in figuris sequentibus, duo puncta AB , & quærat perispicillum quod radios ad punctum A inclinatos sic refringat, ut post refractionem iidem ad punctum B inclinentur. Et quidem jam monuimus perinde esse, siue radii ad punctum A convergant, siue ipsi radii à puncto A divergant, utroque enim modo, eodem dici ad punctum A inclinari: quod idem de quocunque alio puncto B &c. intelligi debet, ne quis circa ea quæ dicta sunt, vel quæ dicenda sunt, hæere possit.

Hinc ergo quadruplex casus particularis oriri potest. Vel enim radii ab uno punctorum A, B , divergentes, sic refringendi sunt, ut post fractionem iidem ad alterum convergant; vel radii ab uno punctorum A, B divergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant: vel radii ad unum punctorum A, B , convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero convergant; vel denique radii ad unum punctorum A, B convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant.

Et quidem omnes illi quatuor casus differunt inter se perispicillis duplici modo inter se diversis. Priori modo, cum perispicilla ipsa diversi sunt generis, quod ad formam siue figuram spectat: quemadmodum diversi sunt generis sphæroides, & conoides de quibus undecimo exemplo egimus. Posteriori modo, cum talia perispicilla differunt tantum secundum convexum & concavum, prout scilicet hoc vel illud ad corpus densius pertinet, vel ad rarius.

Verum, in universum, eorum omnium constructio non multò magis diversa est quàm constructio ellipsis à constructione hyperbolæ, quam suprà initio undecimi exempli ostendimus differre tantum secundum rationem majoris inæqualitatis, & rationem minoris



inæqualitatis. Dicamus ergo breviter de ejusmodi constructione, ut appareat ipsam ad quosdam cosque pulcherrimos geometriæ locos pertinere.

Sunto ergo puncta A, B data, oporteatque in plano figuram describere, quâ circa rectam AB circumvolutâ, gignatur forma ad perspicillum apta, ita ut radii à puncto A divergentes, quotquot in perspicillum ipsum inciderint, refringantur ad punctum B. Ex duobus autem mediis diaphanis per quæ radii sive species transibunt, alterum, idemque rarius sit aer; alterum autem, idemque densius est vitrum, atque inter illa duo corpora ratio refractionis data sit.

*Vide Figur.
preced. p. 159.*

Ducatur recta AB, quæ indefinitè producatul ultra B versùs E (ad alteras enim partes versùs A inutile fuerit) ac inter puncta A, B, sumatur quodvis punctum C in recta AB, quod punctum C futurum sit vertex figuræ planæ quæsitæ, quæ ad ovalem formam apprimè accedet, caret tamen adhuc speciali nomine, propterea quòd ipsa geometris hujusque ignota fuisse apparet. Nec multum refert an vertex ille C puncto A, an verò puncto B propior sit; hoc enim liberum est, quamquam ad praxim utilior futurus sit, si ad punctum A magis accedat. Posito autem hoc primo ac præcipuo vertice C ex arbitrio, jam vertex alter E à puncto A remotior erit, immò ultra punctum B in recta AB producta; neque ex arbitrio pendebit illud punctum E, sed illius positio ex prædeterminatis sic habebitur. Fiat ut summa terminorum (id est antecedentis & consequentis simul) eorum inter quos ratio refractionis consistit, ad eorundem differentiam, ita recta CB ad BE, & habebitur secundus vertex quæsitus F; fietque, ut si ex CB secetur CD æqualis ipsi BE, tum recta CE quæ axis erit futuræ ovalis, sit ad rectam BD in ratione refractionis à raro ad densum; fiat quoque BE ad EF in eadem sed inversa ratione nem-

pe ut BD ad CE; & ut CE ad BD, ita AF ad BG; sed punctum F sit in recta AE producta ultra E, punctum autem G è contrario sit propè A. Tum centro A intervallo AF describatur circulus FH, (sufficiet aliqua hujus circuli portio) & centro B intervallo BG alius circulus integer GMLNO, quem tangat recta AL in puncto L, à quo ducatur diameter LBO quæ angulum ALB rectum constituet; ducatur quoque recta BH ipsi AL parallela, sive ad LB perpendicularis, ita ut anguli recti ALB, LBH sint alternatim oppositi, & recta BH occurrat circumferentiæ FH in puncto H, & jungatur recta AH secans BL in puncto V hæc AH determinabit portionem circuli FH quæ ad propositum nostrum utilis erit, sed & eadem AH tanget ovalem describendam in puncto V, & ratio BV ad VH erit ratio refractionis ut BE ad EF, sicuti & LV ad VA. Jam constructio ovalis per puncta talis erit.

Sumpto in arcu FH quocunque puncto I, ducatur recta AI, in qua tale reperiatur punctum X, ut ducta recta BX, ratio hujus BX ad XI sit ratio refractionis ut BE ad EF, sive ut BV ad VH; sic enim punctum X erit in ipsa ovali. Et quia in eadem recta AI aliud reperiri potest punctum Y, ad quod si ducatur recta BY, erit quoque BY ad YI in eadem ratione refractionis: tale punctum Y ad eandem ovalem adhuc pertinebit. Quoniam autem recta AI ducta est utcunque, si multæ ducantur eodem modo ad quotlibet puncta in arcu FH assumpta, habebuntur simili constructione in singulis ex illis rectis, duo puncta ad ovalem pertinentia. Inventis ergo hac ratione quotcunque punctis per quæ ipsa ovalis transire debet, describetur illa ut describi solent multæ linearum curvæ per quotlibet puncta inventa per quæ linea illa transire debet.

Porro, ex tali constructione methodus non inelegans

deduci potest quâ ipsa ovalis motu aliquo continuo describeretur, nec machina ad talem descriptionem requisita, quamquam satis composita, admodum difficilis esset, nec unico modo perficeretur, immò forsan innumeris: at verò hæc ad organicam potius pertinent, nos autem de locis geometricis hîc agimus.

Patet ergo talem ovalem locum esse ad rectas in ratione data existentes; siquidem BE ad EF, BX ad XI, BY ad YI, BV ad VH, &c. sunt semper in eadem ratione, nempe in ratione refractionis à denso ad rarum.

At phrasi geometricâ sic loquemur. Expositâ quâcunque rectâ AB indefinitâ, signatisque in ea duobus punctis A, B, ac descripto centro A & intervallo AF majori quàm AB, circulo FIH, ductâque ad ejus circumferentiam quâcunque rectâ AI quæ sic secetur in X, ut ratio rectæ BX ad XI data sit, sed minoris inæqualitatis, erit punctum X ad lineam quampiam alicujus generis, quod nec ad rectas nec ad conicas pertinet, & tamen ad Dioptricam utile esse poterit.

Quomodò autem, & quando ejusmodi ovalis Dioptrica inserviet, sic declarabimus. Ad hoc sanè duæ conditiones præcipuæ requiruntur. Prima est, ut ratio data BX ad XI sit ratio refractionis à denso ad rarum inter duo corpora diaphana per quæ radius opticus sive species visibilis transire deber. Secunda, ut datis duobus punctis A, B, semidiameter AF non sit cujuscunque longitudinis, sed illa major quidem sit quàm AB, at minor quàm ea recta ad quam AB habet rationem refractionis à denso ad rarum, sequàm BE ad EF; ut sic postquàm factum fuerit ut FE ad EB, ita FA ad BG, ipsa BG minor sit quàm AB; nam his conditionibus aut altera earum deficientibus, describeretur quidem aliqua linea curva, sed quæ ad Dioptricam inutilis esset: cum autem aderunt illæ conditiones, tunc usus illius in Dioptrica talis erit.

Dux quidem sunt partes ejusmodi curvæ. Prior ac præcipua est ea que existit circa verticem C usque ad duo puncta contactus V, 7; posterior est reliqua circa alterum verticem E usque ad eisdem contactus: sed hæc posterior pars inutilis est, prior verò facit ut existente corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpoliro, putà vitro cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat; radii omnes à puncto A procedentes, atque in superficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in punctum B; atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in A: quâ ratione primo casui particulari ex quatuor præmissis factum est satis. Sic, si radius incidentiæ in raro sit AY, radius refractionis in denso erit YB; atque è contrario, si radius incidentiæ in denso sit BY, erit radius refractionis in raro YA.

Quòd si corpora permutentur, ut rarius sive aër contineatur sub forma ovali proposita, densiore sive vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra densum dirigebantur versùs punctum B, inciduntque in superficiem VC7, sic refringuntur, ut intra rarum divergant, tanquam si à puncto A progrediantur. Atque è contrario, radii omnes qui intra rarum ad punctum A convergebant inciduntque in eandem superficiem, sic refringuntur intra densum, ut divergant tanquam si à puncto B progrediantur. Sic radio incidentiæ existente LV, MZ, fiet radius refractionis VH, Z5; & è contrario, existente radio incidentiæ HV, 5Z, fiet radius refractionis VL, ZM; hoc autem pacto satisfacimus quarto ex quatuor casibus particularibus.

Alio modo, nec minus eleganti, describi potest ejusmodi ovalis per puncta, beneficio circuli GMLNO su-

perius descripti. Ducatur enim ab ejus centro B ad illius circumferentiam ex utraque parte, quæcunque diameter LBO, in qua producta, si opus sit, inveniatur tale punctum V, ut ducta recta AV sit ad VL in ratione refractionis, sed à raro ad densum; (in priori constructione, BX ad XI habebat eandem rationem, sed inversam, quippe à denso ad rarum) sic enim rursus punctum V erit ad eandem ovalem. Simili modo, si in eadem diametro LBO producta si opus sit, inveniatur punctum aliud 4, ita ut ducta recta A 4 sit ad 4 O in eadem ratione refractionis à raro ad densum ut AV ad VL, sive ut FE ad EB, erit punctum 4 ad ovalem. Quòd si ducantur aliæ quotcunque diametri per centrum B, sed diversæ à diametro LBO, putà MB₁₂, &c. habebuntur simili constructione unaquaque duo puncta, putà Z, 11, &c. ac per omnia illa puncta ducetur ovalis.

Nec admodum difficile erit invenire ex tali constructione motum aliquem continuum qui ipsam ovalem uno tractu perficiat; quod rursus ad Organicam pertinet.

Mirum autem est quanta in præmissa ovali locorum geometricorum seges, nec verò qualiumcunque, sed talium qui inter elegantissimos annumerari possint & debeant. Lubet ergo ex amplissima illa messe spicas aliquas selectiores metere, ex quibus geometræ de tota judicium ferre possint.

In prima ergo constructione diximus BX esse ad XI in ratione refractionis à denso ad rarum. Quòd si ergo, ducta utcunque semidiametro AI, queratur in ea punctum X quod ad ovalem esse debet: manifestum est in triangulo BXI (intellige ductam esse rectam BI) dari basim BI, angulum I, & rationem laterum BX, XI. Quia etiam infinitæ sunt semi-diametri, putà A 35, AH, &c. manifestum est quoque infinita esse talia triangula B 10 35, BVH, &c. in quibus omnibus basis data est una

cum angulis qui sunt ad puncta 35, H, &c. & ratione laterum, quæ semper est ratio refractionis à denso ad rarum. Jam ergo cō deducta est quæstio, ut omnium illorum triangulorum inveniantur vertices X, 10, V, &c. Et quidem tale problema vulgare est: at in praxi proposita, si constructio illius toties repetenda esset quot sunt triangula sive quot sunt invienda puncta per quæ ovalis ducenda sit, id sanè & tædiosum esset, & errori valdè obnoxium. Huic ergo difficultati pulcherrimè occurreret geometria, exhibendo nobis locos quosdam, nempe circulorum circumferentias quæ brevissimo compendio dabunt puncta quæsita. Sed quoniam loci illi ex vulgari constructione problematis deducuntur, operæ prætium erit ipsam explicare; pendet autem illa ex loco quinti exempli præmissi, hoc modo.

Propositâ basi BI cujusvis ex triangulis, putà BXI, cujus vertex X inveniendus sit; secetur ipsa BI in T, ita ut IT ad TB sit quemadmodum FE ad EB, hoc est in ratione refractionis, ita tamen ut BT sit minor terminus, quandoquidem latus BX debet esse minus quàm XI, atque in eadem ratione. Tum productâ rectâ IB ultra B usque in 42, fiat I 42 ad 42 B in eadem ratione, seceturque bifariam recta T 42 in Q; ac centro Q, intervallo autem QT, vel Q 42, describatur circulus TXY 42, qui secabit rectam AI, dabitque in ea punctum X quæsitum: sed & idem circulus dabit in eadem AI punctum Y: erunt ergo illa puncta vertices duorum triangulorum BXI, BYI, quorum latera erunt in ratione proposita refractionis, ut quidem BX ad XI, ita BY ad YI, & utraque ratio est ut BE ad EF, sive ut BT ad TI.

Quòd si super omnibus basibus datis B 35, BH &c. fiat similis constructio; habebuntur hæc vulgari constructione vertices omnium triangulorum. Patet autem in unaquaque ex illis constructionibus dari centrum unum quale:

est centrum Q, & duo intervalla qualia sunt QT, Q₄₂, ad describendos tot circulos, quot sunt bases datæ, sive quot sunt centra.

Sed, quod mirum permultis videri possit, omnia illa centra existunt in una eademque quadam circuli circumferentia, qualis est RQK, quæ secat bifariam axem EC in K; & centrum illius P existit in eodem axe producto ultra E, sic ut ratio FB ad BK eadem sit cum ratione semidiametri AF ad semidiametrum KP: unde respectu duorum circulorum FH, RK, quorum centra sunt A, P, punctum B ad utrumque ex istis Circulis est similiter positum: ita ut si per punctum illud B ducatur recta quæcunque IBQ, arcus IF, QK, qui ad ipsos circulos pertinent, sint similes, ut si unus illorum sit 30. grad. exempli graria, erit & alter 30. grad. Similiter si ducatur alia recta HBR, erunt arcus HF, RK similes, & punctum R erit centrum respectu basis BH, ad inveniendum verticem V trianguli BVH in recta AH; atque ita de reliquis. Verùm in hac recta AH hoc speciale est (quia ipsa tangit ovalem) quòd circulus centro R descriptus, exhibeat in ipsa unicum duntaxat punctum V in quo circulus ille tangit tantùm rectam ipsam AH, non autem secat, sicuti secant suas rectas reliqui circuli quorum centra sunt in arcu RK, à puncto R ad K.

Manifestum est ergo circumferentiam RQK centro P descriptam, esse locum ad centra infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum: hæc ergo circumferentia dicatur primus centrorum locus; dabitur enim alius, ut infra patebit; dicetur etiam aliquando circulus RQK primus centrorum circulus.

Præterea, sicuti in basi BI inventum est supra punctum T; sic in unaquaque alia basi putà B₃₅, BH &c. reperiri potest punctum ipsi T analogum: erunt ergo infi-

nita talia puncta, sicuti numero infinita sunt tales bases: at illa omnia existunt in una eademque circuli circumferentia ET 24 8, quæ ovalem tanget in vertice E; centrum autem illius erit punctum 13 in recta EA inter B & A: eritque ut FB ad BE, ita semidiameter FA ad semidiametrum E 13: quo pacto rursus punctum B ad utrumque circulum FIH, ET 8, similiter positum erit. Sicuti autem ad inveniendum punctum X verticem trianguli BXI usi sumus intervallo QT à centro Q ad punctum T in basi BI; sic ad inveniendum punctum 10 verticem trianguli B 10 35, utemur intervallo 44 r à centro 44 in circulo RQK, ad punctum r in circulo ET 8.

Patet igitur circumferentiam ET 8 centro 13 descriptam, esse locum ad infinita intervalla infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum. Hæc ergo circumferentia dicatur primus intervallorum locus, dabitur enim statim alius, dicetur etiam aliquando circulus ET 24 8, primus intervallorum circulus.

Rursus, quemadmodum in eadem basi BI productâ ultra B, inventum est punctum 42; sic in unaquaque alia basi reperietur punctum ipsi 42 analogum: ac infinita illa puncta existunt in una eademque circuli circumferentia 15 46 42 C quæ ovalem tanget in vertice C; centrum autem ipsius circumferentiæ erit 27 in axe CE producto ultra E; sed in præmissa figura centrum illud 27 nimis remotum esset à reliquis, unde non potuit in ea signari: atque ut suprà, punctum B respectu hujus circuli, similiter positum est ut respectu circuli FIH; quia ut recta FB ad rectam BC, ita est semidiameter AF ad semidiametrum hujus circuli C 27. Quoniam etiam hic circulus terminat intervallum Q 42 æquale intervallo QT, & intervallum 44 46 æquale intervallo 44 r, & sic de reliquis; dicetur idem, secundus intervallorum

circulus; & circumferentia illius, secundus intervallo-
rum locus.

Huc usque ergo habemus quatuor circulos, quorum respectu punctum B similiter positum reperitur, nempe FIH qui primus omnium est; KQR qui primus est centrorum circulus; ET 8 qui primus est intervallorum circulus; & C_{42 46} qui intervallorum secundus est. Atque etiamsi punctum B nullius ex ipsis quatuor circulis centrum existat; tamen quia ipsum in unoquoque similiter positum est, fit ut omnis recta quæ per B ducta circulos omnes illos secat, abscindat ab omnibus quatuor circumferentiis, arcus similes ad axem CE productum utrinque si opus fuerit, terminatos. Sic recta ITBQ₄₂ abscindit quatuor arcus, IF, TE, QK, & 42 C omnes inter se similes, atque ita de cæteris.

Cur autem fiat ut in uno ex istis circulis centrum P sit ad unas partes puncti communis B; in alio verò centrum 13 sit ad alteras; nulla alia est causa quàm quòd vertices ipsorum circulorum sunt ad diversas partes ejusdem puncti B: sed minima quæque persequi in exemplis, non vacat: hæc enim faciliè supplebit vel mediocris geometra.

Suprà dedimus duas nostræ ovalis constructiones per puncta, quarum prior utebatur ciculo FIH ad determinandas triangulorum bases BI, BH, &c. Posterior verò utebatur circulo GMLNO ad determinandas aliorum triangulorum bases, putà basim AM trianguli AZM; basim AL trianguli AVL; basim AO trianguli A4O, &c.

Itaque circumferentia prioris horum duorum circulorum FIH dici potest primus basium locus; & circulus dicetur primus basium circulus.

Eodem jure circumferentia posterioris circuli GMLNO dicetur secundus basium locus; & circulus, secundus basium circulus,

Quacumque

Quæcunque autem diximus de primo centrorum loco, ac de primo & secundo intervallorum, referuntur omnia ad primam constructionem; sicuti & primus basiumlocus. At si ad secundam constructionem respiciamus, ad quam pertinet secundus basium locus GMLNO; tunc respectu illius constructionis dabitur secundus centrorum locus hoc modo.

Primus intervallorum locus ET 24 8 secar axem EC productum inter C & A, in puncto 8. & idem locus tangit rectam AL in puncto 17; sicuti ex constructione secundus basium locus eandem AL tangit in L; secetur bifariam recta C 8 in puncto 9; tum centro P (hoc enim commune est centrum tam primi quàm secundi centrorum circuli) intervallo autem P 9, describatur circulus 9 18, qui eandem rectam AL productam ultra L tanget in 18; hic ergo erit secundus centrorum circulus, & circumferentia illius erit quoque secundus centrorum locus; quomodo autem centra secundæ constructionis in tali loco accipiantur, postea declarabimus. Sed & secundus intervallorum locus 15 42 C tangit eandem rectam AL supra punctum 18 in puncto 19; eritque recta 18 19 æqualis rectæ 18 17, propterea quòd recta 9 8 æqualis est rectæ 9 C.

Quòd autem tres circuli, nempe secundus centrorum, & ambo intervallorum, rangant rectam eandem AL productam quantum satis, id vi geometriæ deducitur ex constructione illorum, atque ex eo quòd secundus basium circulus eandem tangat ex constructione; sed demonstratio, ut elegantissima est, ita & longissima: nos ergo ipsam cum plurimis aliis relinquimus.

Quoniam itaque quatuor illi circuli, secundus basium, secundus centrorum, & ambo intervallorum, eandem rectam tangunt, habentque omnes centra sua in eadem recta AB producta quantum satis; atque huic rectæ AB occurrit

ipsa tangens AL in puncto A; sequitur tale punctum A respectu omnium quatuor illorum circularum, esse similiter positum. Sed & in omnibus quatuor, erunt distantia à puncto A usque ad illorum vertices 8, G, 9, C, semidiametris illorum proportionales: erit quippe recta A 8 ad rectam AG ut semidiameter 13 8 ad semidiametrum BG. Et ut recta A 8 ad rectam A 9, ita semidiameter 13 8 ad semidiametrum P 9: atque ita de reliquis.

Unde si per punctum illud A ducatur quæcunque recta quæ circulos illos omnes secet, auferet hæc ab omnibus similes arcus circumferentiarum, à recta AB usque ad puncta sectionum extensos; putà arcus 8 20, G 23, 9 21, & C 22, inter rectas AB, AV &c.

Dicamus verò nunc quâ ratione secundæ constructionis nostræ ovalis centra in circumferentia 15 9 18, quæ secundus centrorum locus est, accipiantur. Ad hoc autem ducatur à centro B ad secundum basium locum GML, quævis semidiameter BL, quæ producta perficiat integram diametrum LBO ut suprâ; ducaturque tam AL, quàm AO, quarum utraque basis erit, illa quidem trianguli AVL, hæc autem trianguli A 4 O, quorum vertices quærentur: illi ergo vertices, beneficio talis secundi centrorum loci, sic reperientur. Prima basis AL occurrit illi secundo centrorum loco in puncto 18; & eadem occurrit primo intervallorum loco in puncto 17; secundo autem, in puncto 19: sumetur ergo pro centro punctum 18, pro intervallo, 18 17, vel 18 19, (æqualia enim sunt illa ut suprâ notavimus) tale enim intervallum dabit in semidiametro BL, punctum V quæsitum. Sed & hoc speciale est huic puncto V, quòd ducta AV tangat ovalem in ipso V, eò quòd centrum 18 est punctum contactus rectæ AL & secundi loci centrorum. Similiter, si altera basis AO producat quousque illa

ex altera parte versùs O, occurrat tam secundo centro-
rum loco in puncto 26, quàm ambobus intervallorum,
in punctis 24, & 25, dabit illa centrum aliud 26, &
duo intervalla æqualia 26 24, & 26 25; quorum il-
lud quod erit 26 24, terminabitur in primo intervallor-
um loco; (centrum 26, & alterum intervalli punctum
25, in nostra figura, nimis longè distarent à puncto A)
tali ergo centro, ac tali intervallo, inveniemus in, se-
midiametro BO, punctum quæsitum 4 in ovali.

Simili modo, si in secundo basium circulo, ducatur
diameter MB 12; huic convenient duæ bases, AM, &
A 12, pro triangulis AZM, A 11 12; (finge triangula
illa esse absoluta, quod vitandæ confusionis gratiâ hic
factum non est) ac unaquæque ex illis basibus secabit
tam secundum locum centrorum, quàm utrumque in-
tervallorum; dabitque in illo quidem centrum, in his
verò, intervallum, cujus beneficio, in utraque semidia-
metro BM, B 12, invenietur punctum Z, vel 11, quæ-
situm.

In hac verò secunda constructione unicum centrum,
putà 18 dat in ovali unicum punctum putà V; quod idem
de omnibus aliis verum est; cùm è contrario, in prima
constructione unicum centrum Q dederit duo puncta X
& Y.

Neque verò prætereundum est quomodo talium lo-
corum beneficio, & centra, & intervalla, ac denique
puncta ad ovalem pertinentia facillimè inveniuntur.
Quod sanè in prima ex duabus præmissis constructioni-
bus præstitisse sufficiet: hinc enim, quâ ratione eadem
methodus ad secundam constructionem accommodari
possit, illicò patebit. Quæcunque autem circa tale ar-
gumentum dicturi sumus, praxim respiciunt, quæ hoc
modo expeditissima, & certissima reddi potest.

Descriptis ergo secundùm præscriptas leges sex cir-
Y ij

culis sive sex locis ut suprà, duobus quidem basium, duobus centrorum, & duobus intervallorum: assumatur in primo loco basium, quodvis punctum I inter F & H (ultrà enim inutile fore suprà notatum est) & jungatur recta AI, in ea enim reperiri debent duo puncta X, Y, ad ovalem pertinentia: tum arcui FI sumantur duo alii arcus similes, alter KQ in primo centrorum loco, alter ET in primo loco intervallorum: ac sumpto intervallo QT, & pede circini manente in centro Q, notentur altero pede mobili duo puncta X, Y, in recta AI, ut propositum est.

Verùm, inquiet aliquis, possuntne promptè ac expedite haberi arcus similes in diversis iisque inæqualibus circulis? Possunt sanè, nec uno modo; sed hic omnium facillimus jure videri possit. Duc quaecunque basium BH (extrema ad extremum punctum H pertinsens, in hac prima constructione, reliquis præstat, in secunda constructione, nihil refert) quæ producta quantum factis, dabit in primo loco centrorum arcum KR; ac in primo intervallorum, arcum ES, qui inter se, & ipsi FH similes erunt. Dividantur omnes illi tres arcus singuli in quocunque partes æquales, ita tamen ut partes unius sint quoque numero æquales partibus alterius: putà, dividatur unusquisque primùm bifariam, deinde quælibet pars rursùm bifariam, atque ita continuè quantum quis voluerit. Hoc enim pacto, puncta arcus FH terminabunt semidiametros AI, AH, &c. Puncta autem prædictis ordine correspondentia in arcu KR, dabunt centra Q, R &c. ac tandem puncta eodem ordine sumpta in arcu ES, terminabunt intervalla. Cætera sunt facilia, nec est cur in iis immoremur.

Expeditis ut suprà, quæ ad primum & quartum ex casibus particularibus refractionum pertinebant, superest nunc ut reliquis duobus, secundo scilicet & tertio,

satisfaciamus : nempe ut explicemus rationem componendi loci qui duobus illis casibus inserviat. Sed antequàm ad rem ipsam veniamus, lubet hic aliquantisper immorari circa quatuor præcipua puncta figuræ præcedentis, duo nempe focorum A, B; & duo verticum C, E: ex tali enim consideratione magis elucescet analogia quæ inter casus jam expeditos, & eos de quibus agendum superest, intercedit; quæ quidem analogia ad eorumdem casuum figuras extenditur, habetque aliquid simile ei analogiæ quæ in doctrina conica reperitur inter hyperbolam & ellipsim.

*Vide Figur.
Pag. 159.*

Statuamus primum ex illis quatuor punctis, duo B, & C, esse immobilia, eademque remanere in eo statu in quo hucusque constituta sunt: at punctum A (quod primum ac præcipuum est) mobile esse, idemque diversas positiones successivè ad arbitrium obtinere, ac tandem quartum E catenus mobile esse, quatenus necessitas geometrica id exigit: existant tamen omnia quatuor in una eademque recta linea AB, quæ ad hoc negotium, utrinque indefinitè producat.

Ergo, respectu puncti B, vel ipsum punctum A erit versùs C, vel versùs E. Et siquidem illud sit versùs C; vel erit intra figuram inter B, C; vel illud erit in vertice C; vel idem erit extra figuram ultra C, ut in figura præmissa; sed ita ut ab ipso puncto C longissimè, immò infinitè distare possit. Rursùs, si respectu puncti B, punctum A sit versùs E; vel illud A erit inter puncta B, E intra figuram; vel illud erit in vertice E; vel idem erit extra figuram ultra E, sic ut ab ipso puncto E longissimè, immò infinitè distare possit. Tandemque illud idem punctum A considerari potest tanquam si puncto B congruat; ita ut ambo simul unicum punctum efficiant.

Incipiamus ab hoc ultimo statu quo punctum A punc-

I. Status;

to B congruit : tunc verò loco ovalis CVE 7 habebimus circulum, cujus centrum erit idem punctum commune A vel B, & intervallum sive semidiameter BC, cui æqualis erit BE ; unde punctum E vi geometricâ ; tantum distat à puncto B quantum C ab eodem B. Duo loci basium describentur circa idem centrum B vel A secundum præscriptas leges in præcedenti constructione, ex duobus locis centrorum, alter, nempe primus coalescet in unicum punctum B, alter erit circumferentia ejusdem circuli CVE 7 qui loco ovalis succedet : tandemque ipsa eadem circuli CVE 7 circumferentia referet duos reliquos locos intervallorum. Sed omnia ad Dioptricam erunt planè inutilia.

II. Status.

Esto deinde punctum A intra ovalem inter B & C : ac tunc fiet figura ovalis in qua præcipuus vertex C propior erit præcipuo foco A quàm vertex E foco B ; attamen distantia BE minor erit quàm BC ; atque ita excessus rectæ AE supra rectam AC major erit quàm excessus rectæ BC supra rectam BE ; ac duorum illorum excessuum ratio erit ipsa ratio refractionis. Sex loci, nempe duo basium, duo centrorum, & duo intervallorum, non aliter invenientur quàm in præcedenti figura, sed illi paulò aliter erunt dispositi, quod tamen nullius momenti est ; quia hæc omnia ut priùs, ad Dioptricam sunt inutilia.

III. Status.

Esto jam punctum A in præcipuo vertice C : quo pacto fiet ovalis quàm acutissima esse potest versùs ipsum C, versùs E autem, quàm obtusissima : siquidem, dum focus A procedit à B ad C, ipsa ovalis in vertice C fit semper acutior ; in E autem, obtusior, quousque ipse focus A pervenerit in C, à quo procedendo extra ovalem, vertex C fit minùs acutus, E verò minùs obtusus. At hoc in statu foci primarii A in præcipuo vertice C constituti, ratio axis CE ad excessum quo recta BC superat ec-

tam BE, est ipsa ratio refractionis. Primus locus basium, primus centrorum, & primus intervallorum inveniuntur ut in superiori constructione factum est, inter quos ille qui primus est intervallorum transit etiam per C vel A; quo pacto idem cum transeat per extrema axis C, & E, tangit ovalem in ambobus illis punctis, & centrum illius est in medio axis ejusdem in K. Secundus locus basium, secundus centrorum, & secundus intervallorum omnes transeunt per idem punctum C vel A, sed centris differunt: illa tamen, qui hac ovalis ad Dioptricam nihil confert, relinquenda judicavimus.

Existat nunc focus A extra ovalem, ultra verticem C, non tamen infinitè; tunc autem omnia se habebunt prorsus ut in præmissa figura; ita tamen ut, quò major erit ratio rectæ AB ad rectam BC, eò magis ovalis ipsa ad figuram veræ ellipsis conicæ accedat, neque tamen unquam vera ellipsis fiat. Ac in illa, portio circa præcipuum verticem C ad Dioptricam utilis est, ut in descriptione figuræ præmissæ notavimus.

Abeat nunc punctum A in infinitum ultrà C, qui status nobilissimus est, præbet enim veram ellipsim conicam, ac prorsus eam quæ undecimo exemplo exposita est, quamque ibidem ad Dioptricam pertinere monuimus, cum scilicet ratio axis AH ad distantiam focorum BM est ipsa ratio refractionis. Hic verò omnes sex loci basium, centrorum, & intervallorum abeunt in lineas rectas: sed ex illis, secundus basium, & secundus centrorum infinitè distant à præcipuo vertice, qui in figura ejusdem exempli erit A; reliqui quatuor transeunt per puncta quæ ibidem sunt C, H, A, & centrum ellipsis, suntque illi omnes quatuor ad axem ejusdem ellipsis perpendiculares. Quoniam autem à puncto illo qui præcipuus vertex est & infinitè distat, duci debent rectæ: sciendum est ipsas duci debere axi ellipsis

IV. Status.

V. Status.

Vide Figur.
pag. 149.

parallelas. Cætera facilè intelliguntur ab eo qui doctrinæ Infiniti in Geometria assuevit.

Similiter, si præcipuus focus A infinitè distet ab altero foco B, ex altera parte versùs secundum verticem E, idem omninò accidet quod jamjam diximus, cum idem infinitè distaret versùs C; nam ex doctrina infiniti, idem est distare infinitè versùs C, ac distare infinitè ad contrarias partes versùs E: quod sanè illis qui tali doctrinæ minimè assuefacti sunt mirum videri solet, & plerisque absolutè impossibile.

Apparet ergo ex suprà dictis, id quod hucusque la-
tuisse opinamur, nempe in ellipsi conica, quatenùs illa ad Dioptricam referri potest, tres intelligi debere focos, duos scilicet internos, & unum externum qui infinitè distet à quovis ex duobus verticibus. Unum dicimus externum, non duos, etiam si cuius doctrinæ infiniti imperito, ille minimè unus, sed duo infinitè à se invicem distantes videri possint. Ille enim quandiu in distantia finita à foco B distat, ut suprà, unicus fuit A; postquàm autem abiit in infinitum versùs C, idem eodem modo se habet, ac si uno saltu transilierit ad alteram partem versùs E, paratus regredi ab illa parte versùs E secundum rectam lineam N F E B, usque ad B unde moveri cœperat: immò, sive versùs C, sive versùs E infinitè distare ipse intelligatur, perinde est, quod ad constructionem pertinet: quæcunque enim recta ab eo duci intelligetur, illa axi CE semper, existet parallela.

Supereft nunc ut ipsum focum A consideremus ab infinita distantia versùs E regredientem usque ad B secundum rectam NFEB, hic enim statim dabit locos illos qui duobus reliquis particularibus casibus refractionum satisfaciant. De his agemus postea, sed prius operæ prætium fuerit statuere puncta A & C fixa, B verò mobile
ad

ad arbitrium; at E rursus eatenus mobile tantum, quatenus vis geometriæ id postulabit. Neque enim hujus speculationis fructus minor futurus est quam præcedentis cum qua sanè multa habet communia, sed multa etiam planè diversa, cum scilicet punctum B in infinitum abibit.

Itaque vel puncta immobilia A & C sunt simul, vel illa à se invicem sejuncta sunt. Si simul sint, vel punctum mobile B eisdem congruit, ita ut tres simul existant, vel idem B ab ipsis A, C, distat; idque vel secundum distantiam finitam, vel infinitam.

Si tria puncta A, B, C simul existant, tum quartum *VI. Status.* E cum iisdem existet, evanescetque ipsa ovalis, quæ in idem punctum coalescet, atque unà cum ea omnes sex loci: estque status hic prorsus inutilis.

Si puncta AC simul existant, B autem ab iis utcunque distet, sed finitâ distantia, habemus tertium statum *VII. Status.* ex iis qui suprà expositi sunt, cum punctum A mobile erat, idemque in C constituebatur.

Si punctis A, C, invicem constitutis, punctum B ab *VIII. Status.* utroque infinitè distet ex utraque parte (perinde enim est ex doctrina infiniti, ut suprà,) tunc nulla habebitur ovalis, sed loco illius succedent duæ rectæ secantes se invicem in puncto communi AC, ita ut recta AB angulum ab illis contentum bifariam dividat; eritque ille angulus tantus debetur asymptotæ hyperbolæ illius de qua undecimo exemplo dictum est,posito quodd ratio axis ad focorum distantiam sit ipsa ratio refractionis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad rectam AB perpendiculares, sed ex iis tres primi infinitè distant, sicuti & punctum B; tres secundi in unam coalescunt rectam quæ per punctum commune AC transiit: at illa omnia ad Dioptricam sunt inutilia.

Jam puncta AC, quâcunque distantia finitâ à se invicem,
Rec. de l'Acad. Tome VI. Z

cem distent, & punctum mobile B incipiat ab A, moveaturque ad C, & ultra usque in infinitum.

IX. Status. Existente ergo puncto mobili B in A, loco ovalis habebimus circulum, cujus centrum erit punctum illud commune A vel B, intervallum AC. Et hic status supra expositus est, fuitque primus.

X. Status. Existente autem ipso puncto mobili B inter A & C, multi habebuntur status inter se diversi, de quibus agemus postea; illi enim sunt qui reliquis duobus casibus particularibus refractionum satisfaciunt.

XI. Status. Existente jam ipso B in C, evanescet ovalis, eademque in idem punctum B vel C coalescet; quod jam supra notatum est, atque inter inutilia repositum; is status sextus fuit.

XII. Status. Existente deinde puncto B ultra C, ita ut C sit inter duo B, A, habebimus statum figuræ præmissæ in qua tamdiu immorati sumus: & idem status supra fuit quartus.

XIII. Status. Existente porrò puncto Bultra C vel ultra A in distantia infinita ex quacunque parte (perinde enim est, ut jam non semel notavimus) tunc statum nobilissimum habebimus: abibit enim ovalis nostra in hyperbolam illam de qua undecimo exemplo dictum est, cum scilicet ratio axis ad focorum distantiam est ipsa ratio refractionis. Ac hujus quidem hyperbolæ vertex præcipuus erit, hoc loco, in C; alter minus præcipuus E abibit in infinitum: quæ autem huic hyperbolæ opponitur alia hyperbola, respectu præcipui foci A erit inutilis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad axem infinitè productum perpendiculares; sed ex iis duo primi infinitè distant versus C, nempe primus basium, & primus centrorum; primus intervallorum transit per verticem hyperbolæ inutilis, secundus intervallorum transit per præcipuum verticem C. Secundus centrorum transit per centrum hyperbolarum; secundus autem basium transit per illud

punctum in quo recta AC sic dividitur, ut tota AC ad portionem ipsi puncto C conterminam, habeat rationem refractionis à raro à densum.

Apparet ergo idem hyperbolæ conicæ accidere quod de ellipsi supra dictum est, quodque antiquos latuisse opinamur; nempe, præter duos focos vulgares de quibus in conicis agitur, quique distantia finitâ à centro ultra vertexes removentur, dari tertium qui ex utraque parte infinitè distet ab eodem centro, quatenus scilicet ipsa hyperbola ad Dioptricam refertur, &c. ut supra de ellipsi.

Tandem verò punctum mobile B ab infinita distantia ultra A regrediatur versùs ipsum A à quo moveri incœpit, ita ut idem A existat inter C & B; ac tunc habebimus secundum statum illum inutilem de quo dictum est dum punctum A mobile statuebatur, atque illud existeret intra ovalem inter B & C; nec est quod hîc ultra addamus.

Quòd si quærat aliquis quinam hujusce speculationis circa mobilia puncta fructus futurus sit, præcipuè circa locorum doctrinam ad quam pertinere debent hæc nostra exempla: sciat ille primùm quidem in universum, tali, vel aliâ simili consideratione apprimè detegi naturam figurarum omnium; cùm scilicet ritè notaverimus quid ex diverso situ præcipuorum punctorum ad illas pertinentium, eisdem figuris accidere possit, unde illæ immutari queant.

At in specie, quòd ad locos attinet, meminerit vix aliter detegi posse quomodo illi invertantur, aut in figuras genere, aut specie diversas permutentur; quemadmodum supra vidimus locum illum de quo hoc duodecimo exemplo agimus, nunc esse ovalem aliquam, nunc circulum, & aliquando ellipsim, aut etiam hyperbolam: quod adhuc in his quæ statim dicturi sumus, non minùs evidenter apparebit.

XV. Status.

Præterimus suprà cum statum in quo punctum B mobile procedens ab A, progreditur, non quidem versùs C, sed ad contrarias partes usque in infinitam distantiam, quia status ille ad Dioptricam inutilis est: quando enim ipsum existit in distantia finita, habetur secundus status in quo A statuitur inter B & C, de quo suprà; cum autem idem existit in distantia infinita, habetur hyperbola inutilis, cujus focus internus est A, vertex autem inter A & C; ac illud C est vertex hyperbolæ oppositæ, quæ sanè opposita poterit esse utilis, sed illa eadem prorsus erit cum ea de qua duodecimo statu locuti sumus.

Nihil etiam diximus de puncto C infinitè distante; quia tunc evanescit omnis figura, atque unà cum ea, quæcunque puncta ad eandem pertinebant: quæ omnia in infinitum abeunt.

In universum ergo, res eò reducitur ut vel A focus infinitè distet, ac tunc habetur ellipsis utilis; vel B focus infinitè distet, ac tunc habetur hyperbola, cujus altera ex oppositis utilis est, altera inutilis; vel ex tribus punctis A, C, B medium sit C, ac tunc habetur status utilis, cui inservit figura præmissa; vel A & C simul existant, vel A sit medius inter C & B, vel idem A sit in B, qui tres status sunt inutiles, sicuti & inutiles sunt duo illi in quibus vel tria puncta A, C, B, vel, quod eodem recidit, duo B & C simul existunt; vel tandem punctum B medium sit inter C & A: unde septem oriuntur status nondum expediti, atque omnes utiles, de quibus agendum nobis superest, quia illi omnes & soli duobus reliquis particularibus refractionum casibus satisfacient. Nec multum in singulis immorabimur; illi enim omnia habent præmissis analoga, scilicet focos, vertices, & locos basium, centròrum, & intervallorum; sed illa omnia positione differunt, atque ex diversa

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 181
illa positione, figuræ diversissimæ evadunt.

Primus ergo status ex illis septem reliquis esto ille in quo duo puncta B, & E media sunt inter focos C, A; ac vertex secundus E medius quoque est inter B & A; cui statui inservit figura sequens: in qua quatuor puncta C, B, E, D, se habent prorsus ut antea; ita scilicet ut rectæ CD, BE, sint æquales; sicuti & CB, DE; sitque tota CE ad mediam BD in ratione refractionis à raro ad densum. At quia præmissæ conditiones omnes non solum huic statui, sed etiam tribus sequentibus conveniunt, idèd huic primo illud peculiare esto quod ratio rectæ AE ad rectam EB sit major ipsâ ratione refractionis à raro ad densum. In secundo autem statu ponetur hæc ratio AE ad EB esse præcisè ratio refractionis à raro ad densum. In tertio è contrario, ponetur AE esse ad EB in ratione minori quàm sit ratio refractionis à raro ad densum, non minori tamen quàm à denso ad rarum. In quarto, ponetur ratio AE ad EB esse minor ratione refractionis à denso ad rarum, quousque punctum A pervenerit ad verticem E. In quinto, ponetur punctum illud A esse in E. In sexto, ponetur idem A esse inter B & E intra ovalem; ita tamen ut ratio totius BE ad portionem EA major sit quàm ratio refractionis à raro ad densum. In septimo denique statu, ponetur ipsum A rursus intra ovalem inter B & E, sed propius ad idem B; ita ut ratio BE ad EA non major sit ratione refractionis à raro ad densum, sed vel eidem æqualis, vel ipsâ minor.

Etsi verò figuræ omnes, quæ figulis ex istis casibus propriæ sunt, differant tam inter se, quàm ab ea quam primam supra exposuimus; ipsæ tamen plurima habent inter se similia: immò illæ omnes sic delineari ac notis distingui possunt, ut una eademque explicatio omnibus inserviat, nec alia distinctio abhibenda sit, quàm circa positionem aliquot punctorum, quorum quæ in

una figura priora fuêre, eadem in alia figura fient posteriora, & quæ erant media, fient extrema, aut omnino quid simile. Talis sanè est præmissa explicatio, quæ etiamsi primæ figuræ usqueadeò quadret, ut illi soli propria esse appareat, & reverà soli illi propria sit strictè loquendo; eadem tamen, paucis tantùm mutatis, omnibus inservire potest. Id verò in hac secunda figura clarè intueri licet: sed ad hoc monendus est lector, ut quotiescumque in dicta aliqua inciderit quæ secundæ illi figuræ quadrare non videbuntur, tum ipse huc recurrat ad ea quæ statim dicturi sumus, quæque continent præcipua capita in quibus discrepant ejusmodi figuræ.

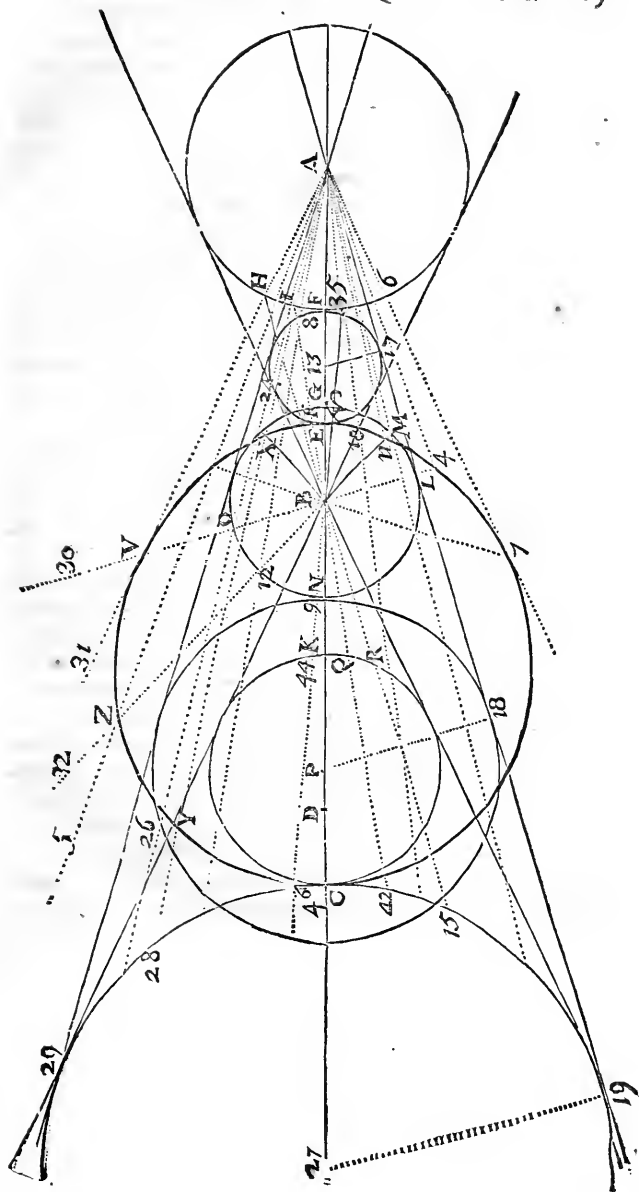
Ac primùm, in hac secunda figura, quia punctum A est ultra tria puncta C, B, E, versùs E, quod contrarium est primæ figuræ: fit ut punctum G sit quoque ad easdem partes ipsius E, cùm in prima esset versùs C.

Secundò, anguli recti ALB, LBH, in secunda figura sunt interiores & ad easdem partes respectu parallelarum AL, BH, qui tamen in prima erant alterni.

Tertiò, in secunda figura, intervallum AF minus est quàm AB, quod in prima majus erat.

Quartò, cujuscunque longitudinis reperiaturs intervallum AF in secunda figura, semper ovalis utilis erit; quod in prima verum non erat.

Quintò, hæc secunda figura satisfacit secundo & tertio casui ex quatuor illis particularibus casibus refractionum ad perspicilla pertinentium qui suprà expositi sunt, cùm prima satisfaceret primo & quarto, ut dictum est. Nam in eadem secunda, posito corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolitò, putà vitro, cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat: radii omnes ad punctum A tendentes, atque in superficiem VC7 incidentes, refringuntur præcisè in punc-

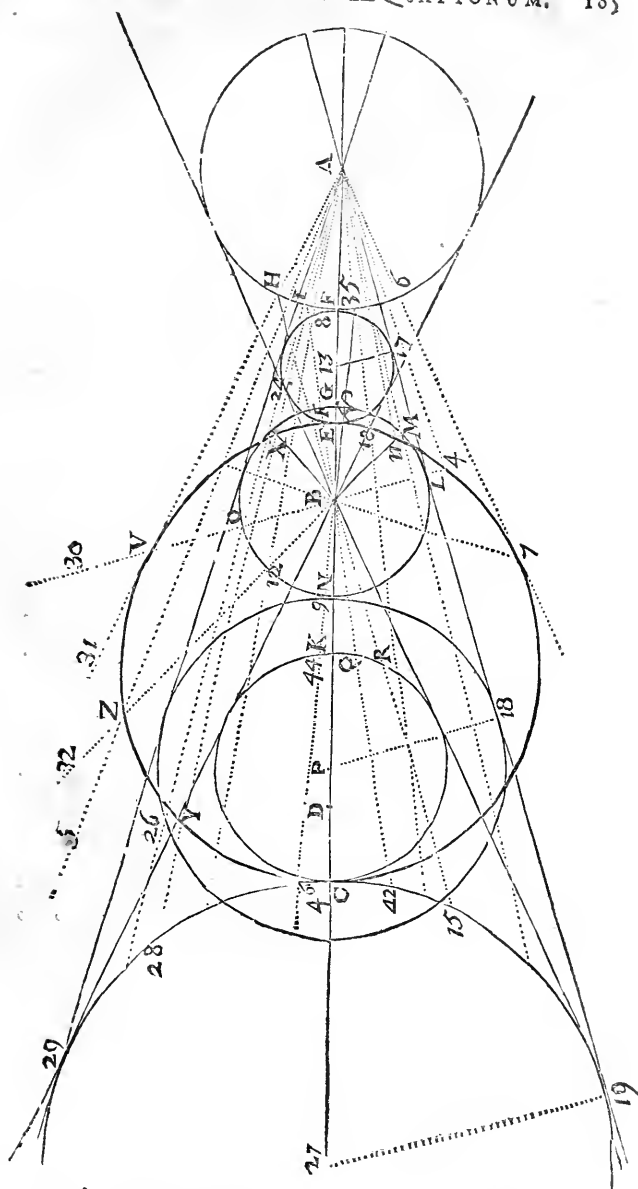


tum B; hic verò est tertius ex iisdem quatuor casibus. Atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes, post refractionem divergunt extra ovalem tanquam si omnes ex puncto A progressi sint: & hic est secundus casus. Sic, si radius incidentiæ in raro sit 28 Y tendens versùs A, radius refractionis in denso erit YB: atque è contrario, si radius incidentiæ in denso sit BY, erit radius refractionis in raro Y 28.

Quòd si corpora permutentur, ut rarius sive àèr contineatur sub forma ovali proposita, denfiore seu vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra rarum procedunt à puncto A, inciduntque in superficiem VC7, sic refringuntur, ut intra densum divergant tanquam si à puncto B progressi sint. Atque è contrario, radii omnes in denso ad punctum B convergentes, atque in eandem superficiem VC7 incidentes, sic refringuntur, ut intra rarum ad punctum A convergant. Sic radio incidentiæ existente AZ intra rarum, fiet in denso radius refractionis Z 32 qui à puncto B procedit; & è contrario, existente intra densum radio incidentiæ 32 Z qui ad punctum B tendit, fiet intra rarum radius refractionis ZA. Quo pacto rursùs alio modo satisfactum est secundo ac tertio ex prædictis quatuor casibus particularibus.

Sextò, centra circulorum illorum sex quos suprà assignavimus pro locis centrorum, intervallorum, & bassum, multò aliter in hac secunda figura, quàm in prima, disposita sunt. Nam in hac secunda figura centrum P quod ad locos centrorum pertinet, reperitur inter vertexes C, E, quod tamen in prima figura erat ultrà. Item, in eadem secunda figura, centrum 27. quod ad secundum locum intervallorum pertinet, abit ultra vertexem C, quod tamen in prima abibat ultra E.

Septimò,



Septimò, quoniam ambo foci A, B in hac secunda figura reperiuntur extra utrumque circulum intervallorum: fit ut tam ambæ rectæ quæ à puncto A procedentes, tangunt secundum locum basium GLNO, quàm ambæ quæ à puncto B procedentes, tangunt primum locum basium FIH: tam hæ tangentes, inquam, quàm illæ, tangant quoque utrumque circulum intervallorum ET 24 8, & 19 C 29, si scilicet tangentes illæ quantum satis producantur.

Cateras differentias quivis facilè percipiet: ideò nos ultrà progrediemur.

Assignavimus suprà differentiam quæ intercedit inter septem illos status in quibus punctum B reperitur inter A & C, diximusque primum in hoc à cæteris distingui, quòd in eo ratio AE exterioris ad BE interiorem (intellige respectu ovalis) major sit ratione refractionis à raro à densum. Huic autem statui omninò accommodata est secunda figura præmissa, in qua ideò primus locus intervallorum ET 24 8 totus extra ovalem existit versùs A & punctum F inter duo A & E constituitur.

Jam secundus status nobilissimus est, in quo scilicet ratio AE ad EB est ipsa ratio refractionis à raro ad densum, unde puncta A & F in unum idemque punctum coalescunt.

In tali autem statu, loco ovalis habemus circulum qui utilis est eodem prorsùs modo quo utilis est præmissa ovalis secundæ figuræ, putà portio illa quæ est circa verticem C usque ad contactus V, 7, quæ portio satisfacit secundo & tercio ex quatuor casibus particularibus refractionum, ut diximus in quinto ex septem capitibus, quibus præmissa secunda figura à prima discrepat. Nec quicquam circa talem explicationem immutandum est, ita ut illa conveniat tam ovali secundæ figuræ, quàm circulo tertiæ sequentis, in qua, etiam si puncta B, C,

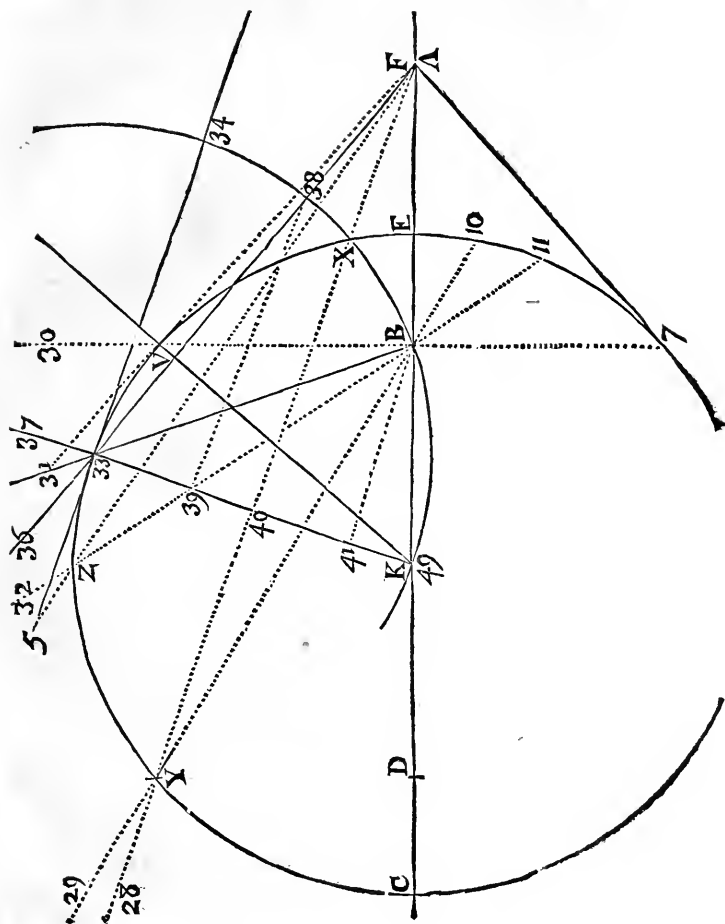
D, E eodem prorsus modo disposita sint quo in 2^a figura, tamen, propter rationem refractionum à raro ad densum quæ intercedit inter rectas AE, EB, fit ut sex loci de quibus toties suprà dictum est, singuli amissâ suâ extensione seu magnitudine, in puncta coaluerint; primus scilicet locus basium in punctum A; secundus basium in punctum B; ambo centrorum in punctum K, quod est centrum propositi circuli CVE7; primus intervallorum in punctum E; ac tandem secundus intervallorum in punctum C.

At verò, quòd proprietas adeò insignis circulo CVE7 conveniat; posito scilicet quòd tam ratio AE ad EB, quàm ratio diametri EC ad BD fit ratio refractionis à raro ad densum, ac proinde etiam ratio AC ad CB; (hæc enim tertia ex duabus prioribus sequitur) quòd, inquam, quivis radius 36 33 à raro quod est extra circulum, putà ab aëre incidens in densum quod est intra circulum, putà in vitrum, in punctum 33 quod est in circumferentia, si dirigatur ad punctum A, non tamen ad idem A perveniat, sed frangatur in ingressu 33, ac fractus abeat in B, illud ex sequenti demonstratione manifestò patebit: quæ quidem demonstratio circulo specialis est, nec prolixa; universalis enim, quæ tam ovalibus quàm circulo conveniret, longiori indigeret apparatu, ut jam suprà monuimus.

Ad hoc autem tria notanda sunt. Primum, quoniam est ut AE ad EB, ita AC ad CB, & quatuor puncta A, B, C, E sunt in eadem recta linea, estque A extra circulum, B intra, at EC est diameter; fit necessariò ut educât ex B puncto rectâ perpendiculari ad diametrum EC, atque eâ utrinque productâ usque ad circumferentiam, puncta in quibus ipsa circumferentiæ occurrit, sint ipsa V & 7; in quibus rectæ AV, A7 ipsum circulum tangunt, ita ut ductâ rectâ KV, angulus KVA rectus

fit, arque ita, ratio rectæ AV ad VB sive KV ad KB, rationi rectæ AK ad KV sit similis: atque earum rationum conversæ similes, scilicet BV ad VA, BK ad KV, & VK ad AK. Secundum, propter eandem rationem AE ad EB, & AC ad CB, fit ut duæ quæcunque rectæ A 33, B 33 quæ ad idem punctum 33 in circumferentia utcunque assumptum ducuntur, in eadem quoque ratione existant, putà ut AE ad EB, sive ut AC ad CB: nam circumferentia EV 33 C7 talem locum exhibet, qualem quinto loco explicuimus, atque idè etiam eadem est ratio AV ad VB, & AZ ad ZB, & AY ad YB, &c. unde, quoniam ponitur ratio AE ad EB esse ratio refractionis à raro ad densum, erit quoque AV ad VB, A 33 ad 33 B, &c. ratio refractionis à raro ad densum. Tertium, ductâ rectâ 5 33 34 quæ circumferentiam tangat in puncto 33, tum rectâ 33 K ad centrum K, erit angulus K 33 34 rectus; ac eodem modo fient refractiones radiorum in punctum 33 incidentium à circuli circumferentia E 33 C, quæ à linea recta tangente 5 33 34; siquidem in universum, linea quæcunque curva, & recta ipsam tangens, easdem efficiunt refractiones radiorum in punctum contactus incidentium. Positâ ergo curvâ C 33 E, vel rectâ 5 33 34 pro dioptrica, sive pro superficie refractiva, & existente puncto 33 puncto incidentiæ, erit recta 33 K perpendicularis ad dioptricam.

His præmissis, centro 33 intervallo quocunque, putà 33 B, describatur circulus secans perpendicularem 33 K in puncto 49, rectam 33 A in puncto 38, & rectam 33 34 in puncto 34; eritque arcus 49 34 quadrans; & rectæ 33 49, 33 B, 33 38, & 33 34 erunt æquales. Sed, quod præcipuum est, demissis in rectam 33 49 productam si sit opus, perpendicularibus A 40, B 41, & 38 39: ostendendum est 38 39 ad B 41 esse in ratione refractionis; putà ut AE ad EB; hoc enim demonstrato, manifestum erit



A a iij.

ex lege refractionum quam undecimo exemplo supra exposuimus, fore ut si radius incidentiæ sit $36\ 33\ 38\ A$, tunc radius refractionis sit $33\ B$, & vicissim si radius incidentiæ sit $B\ 33$, tunc radius refractionis sit $33\ 36$: hoc autem sic demonstramus.

Ratio perpendicularis $38\ 39$ ad perpendicularem $B\ 41$, componitur ex rationibus $38\ 39$ ad $A\ 40$, & $A\ 40$ ad $B\ 41$: est autem $38\ 39$ ad $A\ 40$, ut $38\ 33$ ad $33\ A$, sive ut $B\ 33$ ad $33\ A$; & ut $A\ 40$ ad $B\ 41$, ita AK ad KB : quare ratio $38\ 39$ ad $B\ 41$ componitur ex rationibus $B\ 33$ ad $33\ A$, & AK ad KB : ut autem $B\ 33$ ad $33\ A$, ita BV ad VA , ut jam secundo loco notavimus, & ita BK ad KV ; ideoque ratio $38\ 39$ ad $B\ 41$ componitur ex rationibus AK ad KB , & BK ad KV , quæ ambæ constituunt rationem AK ad KV . Ut ergo $38\ 39$ ad $B\ 41$, ita AK ad KV , sive AV ad VB , sive AE ad EB , quæ est ratio refractionis, ut propositum est. Cùmque idem accadat omnibus punctis quæ in arcu $VC7$ assumi possunt, patet arcum illum esse locum ad propositas refractiones, quarum ratio erit ut AE ad EB ; quæ sanè perinsignis est circuli proprietas huc usque, ut existimamus ignota.

Hoc pacto iis satisfecimus quæ initio duodecimi exempli ostendere polliciti sumus, nempe casum tertium ex tribus universalibus Dioptrica casibus de quibus undecimo exemplo dictum est, aliquando ad superficiem sphericam pertinere, sed multo magis universaliter ad alias superficies (nempe ovals de quibus supra) quas antiquis notas fuisse nullibi apparet. Patet enim hunc secundum statum qui ad circulum, atque adeo ad sphaeram pertinet, esse specialissimum, alios verò qui ad ovals, esse universaliiores.

Porrò, qui supersunt status quinque, ad alias ovals pertinent, quas figurâ exhibere supervacaneum hoc loco duximus; neque enim ex prædictis difficile fuerit

easdem satis accuratè describere. Quamobrem, postquam ea breviter exposuerimus in quibus illæ à prædictis præcipuè differunt, tunc ulteriùs exemplis parcemus, duodecim præmissis contenti, quæ sanè perillustra sunt; atque ita ad id quod initio propositum est, accedemus.

Tertius ergo status ad ovalem quandam pertinet, in qua sex loci basium, centrorum & intervallorum describuntur. Sed quia punctum A reperitur inter E & F, hinc fit ut quinque ex illis locis, integri intra ovalem constituentur, nempe præter primum basium, reliqui omnes; primus enim basium, vel totus est extra ovalem, vel aliquid tantum habet intrà; punctum N est versùs E; punctum G est versùs K; punctum 8 est versùs B, atque ita pleraque ex punctis contrario modo disposita sunt quo in secunda figura: est tamen ovalis ipsa tota, ut omnes de quibus hucusque egimus, ad easdem partes cava, quod tribus proximis sequentibus statibus non accidit. Cùmque AE est ad EB in ratione refractionis à raro ad densum, tunc ipsa ovalis ultima est earum quæ ad easdem partes totæ cavæ existunt; ulteriùs enim, puncto A propius accedente ad E, tunc partes ovalis vertici E hinc inde vicinæ, incipiunt esse ad exteriores partes cavæ, ut mox declarabimus.

Quartus status omnia habet tertio similia, nisi quòd circà verticem E, partes aliquæ ipsius ovalis quæ ad talem statum pertinet, nempe partes illæ quæ circà verticem E proximè disponuntur, exterius versùs A cavæ sunt. At post aliquam distantiam hinc inde ab ipso vertice E, eadem ovalis incipit rursùs ad interiores partes versùs centrum K esse cava, nec postea mutatur talis cavitas interior, sed durat per totum ovalis reliquum circa præcipuum verticem C; & quò minor est ratio AE ad EB, eò major est cavitas circa verticem E. Quo pacto ejusmodi ovalis aliquo modo accedit ad formam cor-

dis alicujus animalis, cum hac tamen differentia, ut pars quæ est circa E cava sit exterius, non ad formam anguli ut cor, sed ad formam quasi rotundam; ut si fingas ovalem aliquam quæ prius tota interiùs cava erat, istu quodam alterius ovalis fortioris circa verticem E inficti, rerusam esse ad interiores partes, ut communiter accidit corporibus rotundis debilioribus, dum in firmiora rotunda illidunt. In hac verò ovali, sicuti & in omnibus præmissis, semper reperitur aliqua pars circa verticem E, quæ ad Dioptricam inutilis est, nempe usque ad ea puncta V, 7, in quibus ductæ rectæ AV, A 7, ipsam ovalem tangunt, ut jam suprà sæpiùs dictum est.

Quintus status dum A est in E; quod ad sex locos basium, centrorum, & intervallorum attinet, non admodum differt à tertio & quarto statu præmissis. Ejus verò ovalis circa verticem E exterius cava est quàm maximè. Ceterùm eadem integra ad Dioptricam utilis esse potest, estque prima earum quæ nullas partes habent inutiles; quæ proprietas duobus reliquis statibus etiam convenit. In hoc etiam statu hoc speciale est circa locos, quòd quatuor ex illis, nempe duo loci intervallorum, secundus centrorum, & secundus basium tangant se invicem, atque etiam ovalem in ipso vertice E; unde quæ ab eodem E vel A excitatur perpendicularis ad axem CE, eisdem quatuor locos tangit in ipso eodem E.

In sexto statu, ovalis adhuc cava est circa verticem E, sed minùs quàm in quinto in quo illa circa idem punctum E maximè cava erat; & quò major est ratio rectæ BE ad EA, eò minùs cava est eadem ovalis. In ea sex loci reperiuntur, sed ita ut quatuor de quibus in quinto statu dictum est, extra ovalem excurrant ultra E; unde evanescit tangens AL, quam tamen refert analogicè ea recta quæ ex puncto A excitatur perpendiculariter ad axem

CE;

CE; exhibet enim illa punctum L ubi secat secundum locum basium; punctum 17, ubi secat primum intervallorum; punctum 18, ubi secat secundum centrorum; & punctum 19, ubi secat secundum intervallorum, quod in septimo casu verum quoque reperitur. Sed & pro diversis rationibus refractionum in diversis mediis, atque etiam pro diversis rationibus BE ad EA, accidere potest ut evanescat tangens B 24, quæ ex puncto B educata tangebatur quatuor locos, nempe duos intervallorum, primum centrorum, & primum basium, quam tamen analogicè hoc casu referet ea recta quæ ex puncto B ad axem CE perpendiculariter excitabitur, eo modo quo de tangente AL jamjam dictum est, quod quivis Geometra faciliè intelliget.

At ubicunque existat hoc punctum B, sive extra quatuor illos locos; sive in vertice eorundem, dum vertex ille est in B; sive intra ipsos, ut in hoc statu accidere potest: semper punctum B ad prædictos quatuor locos similiter positum est; ita ut duæ quæcunque rectæ ab eodem B educatæ, & vel tangentes vel secantes quatuor illos circulos, auferant ab illis totidem arcus similes, si sumantur ut sibi respondent. Eadem est ratio puncti A respectu suorum quatuor locorum, de quibus hoc & quinto statu dictum est. Unde inferre licet tam punctum A ad duos locos intervallorum similiter positum esse, quàm punctum B ad eosdem, etiamsi positio puncti B positioni puncti A minimè similis existat.

Tandem, in septimo statu sex loci non longè aliter se habent quàm in sexto; sed ovalis circa verticem E non ampliùs cava est ad partes exteriores: verùm illa tota interiùs cava existit, nec quicquam in ea speciale reperitur quod sit alicujus momenti.

De tangentibus & rectis ad prædictas omnes ovals perpendicularibus, multa dici possent elegantissima,

quæque hanc materiam, atque adeo totam Geometriam maximè illustrarent: verùm illa ideò præterimus, quia propriè non sunt hujus loci. Hoc tamen moncbimus: In omni statu in quo puncta A & C sunt ad easdem partes respectu puncti B, sive ipsa A, C sint simul, sive illorum alterum propius accedat ad B, quodcunque illud sit, vel A, vel C: tunc omnem rectam quæ ad ovalem perpendicularis erit, occurrere axi ejusdem ovalis in puncto aliquo quod erit inter ipsum B & alterum ex prædictis duobus A, C, quod eidem B propinquius erit. At verò in omni statu in quo punctum B existet inter prædicta A, C, tunc omnem rectam ejusmodi quæ ad ovalem perpendicularis existet, vel axi parallelam esse, vel eidem occurrere ultra puncta A, B, nullam autem vel in ipsis punctis, vel inter ipsa. Sed de his satis: nunc ad propositam nobis materiam de locis ad analysim aptis accedamus.

De locorum divisione in diversos gradus.

MULTI sunt locorum gradus, immò infiniti; alii enim simplicissimi sunt; alii autem magis ac magis compositi, idque in infinitum. Eorum tamen omnium Antiqui duo in universum genera statuerunt.

Primum genus est eorum qui solis constant lineis, sive illæ rectæ sint, sive curvæ. Ac de his sanè intelligi debet omnis sermo in quo de locis simpliciter agitur, nullo addito vocabulo quod contrarium indicet.

Secundum genus est eorum qui superficiebus constant, vocanturque illi communiter loci ad superficiem; quorum quidam per se subsistunt, nec ab aliis oriuntur; quidam contrà oriuntur sive generantur à locis simplicibus primi generis, dum illi circa axes aliquos conversi, superficies aliquas producunt.

Rursus, primum genus locorum in tres classes communiter distribui solet, nimirum in locos planos, in locos solidos, & in locos lineares.

Loci plani duo sunt tantum, nempe linea recta, & circuli circumferentia.

Loci solidi tres sunt, nempe parabola, hyperbola, & ellipsis; qui ex sectione superficiei conicæ & plani alicujus quod nec per verticem coni transeat, nec basi sit parallelum, nec subcontrariè positum, originem ducunt.

Loci lineares sunt omnes aliæ quæcunque lineæ præter rectam, circuli circumferentiam, & conicas sectiones, puta conchoïdes omnis generis, spirales, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, & infinitæ aliæ, quæ tales sunt & tam multiplices, ut etiam nomine careant. Neque enim aliter comparari debent loci lineares cum locis planis aut cum solidis, quàm genus polygonorum quæ laterum multitudine triangulum aut quadrangulum excedunt, cum ipso triangulo aut quadrangulo. Nam, quemadmodum sub tali nomine polygoni continentur pentagonum, hexagonum, eptagonum, octogonum, &c. quæ omnes figuræ non minùs inter se differunt & specie & proprietatibus quàm triangulum à quadrangulo & utrumque horum à cæteris: sic sub uno nomine linearium infiniti loci continentur qui non minùs differunt inter se naturâ & proprietatibus, quàm linea recta aut circuli circumferentia à parabola, hyperbola, aut ellipsi; aut quàm hæc quinque lineæ ab iisdem locis linearibus, seu à conchoïdibus, spiralibus, cissoïdibus, &c.

At verò non omnes loci lineares ad analysim nostram apti sunt, sed illi tantum quos ad æquationes analyticas revocari posse contingit. Quid sit autem locum aliquem ad æquationem revocare, postea declarabimus, & exemplis illustrabimus. Nunc autem, quoniam à multis quæ-

ri solet an ejusmodi loci tam plani quàm solidi & lineares, omnes in universum geometrici dici debeant; extiterunt non pauci inter Geometras vulgò habitì, qui pràter locos planos, nullos alios admittebant, ac ceteros tanquam à Geometria prorsùs alienos respuebant, ita ut problema quodvis insolutum existimarent, quod beneficio locorum planorum solvi non posset, quantumcumque idem aut per locos solidos aut per lineares solveretur: idèò non abs re fuerit hoc loco disquirere quid geometricum, quid verò minimè geometricum censerì debeat, positis tamen iis omnibus quæ vulgò in elementis omnibus geometricis admitti solent.

Sanè in universum, quæstio est de nomine, ut manifestò pater: tamen, quia multi præ arrogantia, ea omnia damnare consueverunt quæ ignorant, ne scilicet re quadam alicujus pretii privari videantur; ac sic multa respuunt quæ à doctis communiter recipiuntur.

Ut talium sic leviter sub appositis suo modo falsis nominibus res bonas damnantium malitiam quivis veritatis studiosus vitare possit, lubet rem ipsam à fundamentis resumere, quibus intellectis, facile erit cuicumque propositionem aliquam geometricè aut secùs solutam, temerè affirmanti aut neganti respondere, atque ipsius affirmationem aut negationem falsam, levem, aut temerariam esse, ex ipsius scientiæ principiis evidenter demonstrare.

Ac primùm omnium convenit propositiones arithmeticas à geometricis distinguere; siquidem illas arithmeticè, hoc est per operationes sive regulas arithmeticas; has verò geometricè, hoc est per locos geometricos, solvi consensaneum est, ut debito seu legitimo modo solutæ dici debeant. Neque tamen negamus utrasque operam sibi mutuam præbere, ac sibi invicem auxiliari, idque multipliciter; quod idèò non impedit ne arith-

metica arithmetice, geometrica geometricè tractentur.

Arithmetica ergo propositiones solvuntur vel addendo, vel subtrahendo, vel multiplicando, vel dividendo, vel radices extrahendo; atque id tam in numeris rationalibus seu unitati commensurabilibus, quàm in numeris irrationalibus seu surdis, vel unitati incommensurabilibus; & sive in numeris simplicibus, sive in compositis ejusmodi operationes instituantur, juvante ubicunque Geometria si opus fuerit, cujus præcipuæ partes sunt distinguere atque imperare ubi & quando addere, aut subtrahere, ubi & quando multiplicare aut dividere, ubi & quando radices extrahere conveniat.

Quo in opere non multùm refert utrùm solutio in minimis aut in simplicissimis numeris exhibeatur, vel in majoribus aut magis compositis; sæpè enim accidit ut vel multiplicationes, vel divisiones, vel radicum extractions adeò intricatæ sint, ut ipsas explicare nimis arduum opus sit, nec quodpiam tantæ operæ præmium satis dignum existat.

Neque tamen diffitendum est ea ingenia longè aliis præluere, quibus datum est quæstiones quasunque simplicissimo modo solvere: at illa bonis suis gaudeant, modò ne aliorum solutiones minùs simplices tanquam spurias ac minimè recipiendas, nimis arroganter damnare contendant.

In exemplo. Proponatur in numeris hæc æquatio cubica numericè solvenda. B solidum — C plano in A — A cubo \propto O, & B f. sit numerus infrà positus, nempe apotome sicuti & C p. 729.

$$\begin{array}{l} \text{B f.} \quad \int + \quad 142884 \\ \text{Apotome.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{—} \gamma^9 \quad 17962705800 \end{array} \right. \text{—} 729 \text{ A — A; } \propto \text{ O.} \end{array}$$

Ponamus autem quemdam vel nescire, vel non admodum curare methodum quâ ejusmodi æquatio brevissimè

mo aut simplicissimo modo solvi queat, sed tantum id curare, quo modo illa utcumque solvatur.

Equidem ex constitutione illius, patet ipsam irregularem esse, nec de tribus lateribus explicabilem, verum de unico tantum, eodemque supra: hoc ex nostro opere de æquationum cubicarum recognitione, cap. 3. prop. 6. patebit.

At illius constitutio ex Vieta elegantissime deducitur. Sunt quippe quatuor quidam numeri continue proportionales, quorum qui continetur sub extremis vel mediis est tertia pars numeri radicum, sive tertia pars affectionis sub A; qui numerus in nostro exemplo est C. 729, & ejus tertia pars est 243: differentia autem extremorum est ille numerus qui oritur diviso B^f. per eandem tertiam partem numeri C. Quia ergo numerus ille solidus est hæc apotome $142884 - \sqrt{17962705800}$; eo per 243 diviso, oritur hæc alia apotome $588 - \sqrt{304200}$, quæ idè est differentia numerorum extremorum. Est autem numerus quæsitus A in eadem serie, differentia numerorum mediorum. Eò itaque res reducit, ut ex quatuor numeris continue proportionalibus; datâ differentiâ extremorum, nempe $588 - \sqrt{304200}$; dato etiam producto ex mediis vel ex extremis 243, inveniatur differentia mediorum. Et extremi quidem facilè viâ habentur ex data differentia ipsorum, & producto eorumdem; nam semidifferentia est $294 - \sqrt{76050}$, & hujus semidifferentiæ quadratum est hæc apotome $162486 - \sqrt{26293831200}$, quod additum ipsi producto 243, dat hanc aliam apotomen $162729 - \sqrt{26293831200}$, cujus radix quadrata est dimidia summa extremorum $788200 - 273$. Huic apotome si addas semidifferentiam extremorum prædictam, nempe $294 - \sqrt{76050}$, fit major extremorum quæditorum, hoc nempe binomium $7450 + 21$. Quòd si ex eadem apotome $788200 -$

273, seu ex dimidia summa extremorum, demas eandem semidifferentiam extremorum 294—776050, sit minor extremorum quæsitum, nempe hæc apotome 7328050—567. Hoc pacto, datis extremis, quærendi sunt duo medii proportionales, ut habeatur eorum differentia quæ dabit numerum A quæsitum.

At in quatuor numeris continuè proportionalibus, hoc universale theorema est: Productus ex majori extremo in quadratum minoris extremi est cubus minoris medii. Item, productus ex minori extremo in quadratum majoris extremi est cubus majoris medii. Hac igitur regula ex datis extremis, majori quidem 7450+21, minori autem 7328050—567, dabuntur duo cubi mediorum. Nam quadratum majoris extremi est binomium 891 + 7793800: hoc multiplicatum per minorem extremum dat hoc aliud binomium 726572050 + 5103, & hic est cubus majoris medii. Simili modo, quadratum minoris extremi est hæc apotome 649539—7421857865800; hoc multiplicatum per majorem extremum dat hanc aliam apotomen 719371024450—137781, & hic est cubus minoris medii.

Inventis ergo duobus cubis numerorum mediorum, superest ut cuborum ipsorum radices extrahantur. At verò, talium cuborum alter, nempe major, est binomium: alter autem, seu minor, est apotome; quicunque ergo artem calluerit quâ ex binomiis & apotomis cubicæ radices extrahuntur, is quætionem, si non simplicissimo modo, at certè accuratè omninò solverit; siquidem earum radicum differentia erit numerus A quæsitus, nec alio quovis modo, quamquam simpliciori, alius invenietur numerus. Quòd si reperiat aliquis qui talem artem ignoraverit, is postquàm cubos prædictos invenerit, ibi subsistet, ac dicet numerum quæsitum A esse differentiam radicum cubicarum talium numerorum

exhibitorum sic $\gamma^{\text{cub.}}$ hujus binomii $|\gamma^9 26572050 + 5103| - \gamma^{\text{c.}}$ hujus apotomes $|\gamma^9 19371024450 - 137781|$. Et fanè ea dici poterit aliqua esse solutio, quoniam ipsa ad numeros certos ac determinatos reducta est. Adde quod plerumque accidit ut binomia aut apotomæ non habeant radices cubicas explicabiles, unde ipsarum differentia per ejusmodi radicum extractionem exhiberi non potest, quamvis illa aliquando rationalis existat; quò fit ut eadem, vel aliâ viâ quærenda sit, vel eâ ratione quâ suprâ, per ipsos cubos irracionales exhibenda.

Verùm in proposito exemplo, radices cubicæ à peritro rectè extrahi possunt, quibus exhibitis solutio longè erit elegantior; sunt enim radices illæ binomii quidem, hoc binomium $\gamma^9 162 + 9$; apotomes verò hæc, apotome $\gamma^9 1458 - 27$. Sint ergo hi numeri duo medii quæsitæ, quorum differentia est hæc apotome $36 - \gamma^9 648$ quæ exhibet numerum A quæsitum; quo pacto habemus hoc modo satis longo atque intricato, solutionem quæstionis propositæ: atque etiam si methodus talis solutionis simplicissima non sit, tamen numerus A inventus est simplicissimus.

Verumenimverò sagacior aliquis Analysta, multò compendiosiori viâ eandem inveniet solutionem. Is enim statim propositâ hæc eadem æquatione cubica,

$$B^{\text{c.}} \left\{ \begin{array}{l} + 142884 \\ - \gamma^9 17962705800 \end{array} \right. - 729 A - A^3,$$

animadvertet illam ad minores numeros reduci posse; quandoquidem datur numerus 3, cujus quadratus 9 dividere potest CP $\propto 729$, ita ut ejusdem numeri 3 cubus 27 dividere quoque possit B^{c.} $142884 - \gamma^9 17962705800$; ac divisione per quadratum oritur 81, per cubum autem oritur $5292 - \gamma^9 24640200$.

Hoc

Hoc pacto dabitur alia æquatio in minoribus numeris, nempe hæc,

$$D \left\{ \frac{5292}{\sqrt[9]{24640200}} - F P S I E - E^c \propto O. \right.$$

Cujus æquationis radix E cùm inventa fuerit, ac per 3 prædictum multiplicata, dabitur prioris æquationis radix A quæsitæ. Est tamen hæc nova æquatio ejusdem constitutionis cum ea quæ initio proposita est; quare concludemus in ea contineri quatuor numeros continuè proportionales, ita ut numerus contentus sub extremis vel mediis sit 27 tertia pars FP, sive numeri 81; differentia verò extremorum sit hæc apotome 196— $\sqrt[9]{33800}$; quæ oritur diviso solido D per prædictum numerum 27. Datâ autem differentiâ extremorum, & producto ab iisdem, dantur vulgari methodo iidem extremi, major nempe hoc binomium $\sqrt[9]{50} + 7$, & minor hæc apotome $\sqrt[9]{36450} - 189$. His datis extremis darentur cubi mediorum methodo superiùs traditâ; verùm, eidem Analystæ, quem ex sagacioribus aliquem supponimus, dabitur locus subtili sanè compendio; datur nempe cubus quidam numerus 27 per quem illorum extremorum alter dividî potest, putâ minor sive $\sqrt[9]{36450} - 189$, quâ divisione reperitur hæc apotome $\sqrt[9]{50} - 7$; sumatur ergo talis apotome $\sqrt[9]{50} - 7$ loco minoris extremi, majore eodem semper remanente binomio $\sqrt[9]{50} + 7$, ut suprâ. Hac tamen lege, ut postquàm inter illos extremos duo medii inventi fuerint, tum alter illorum minori proximus multiplicetur per 9, quadratum scilicet numeri 3, ejus cubus 27 divisor fuerit minoris ipsius extremi, nempe $\sqrt[9]{36450} - 189$; alter autem eorundem inventorum mediorum ab extremo minore diviso remotior, multiplicetur per 3 radicem ejusdem cubi 27 divisoris; hac enim duplici multiplicatione dabuntur veri duo medii inter duos extre-

mos quos ex secunda æquatione præmissa ad minimos numeros reducta deduximus, nempe inter binomium $2950 + 7$, & apotomen $2936450 - 189$.

Resumamus ergo duos minimos extremos ultimò inventos post divisionem per cubum 27, qui sunt $2950 + 7$, & $2950 - 7$, inveniamusque inter eosdem, duos medios continuè proportionales.

Rursùs autem hîc quiddam accidit notandum. Nam si quis per traditam suprà regulam, datis extremis, quarat cubos duorum mediorum, is invenietales cubos esse eosdem ipsos extremos: quod idè accidit, quia binomium & apotome quæ ipsos extremos constituunt, iisdem constant nominibus; ac præterèa quadrata ipsorum minum unitate tantùm differunt, quod quoties accidit, toties duo extremi sunt cubi duorum mediorum, unusquisque scilicet illius qui sibi proximus est.

Habeantur ergo duorum illorum extremorum radices cubicæ; binomii quidem, sive $2950 + 7$, hoc binomium $292 + 1$: at apotomes, sive $2950 - 7$, hæc apotome $292 - 1$; atque ita tandem habebimus quatuor continuè proportionales,

$$2950 + 7, | 292 + 1, | 292 - 1, | \& 2950 - 7,$$

in numeris multò minoribus quàm antèa. Quòd si intacto primo, ut suprà decrevimus, secundum illorum multiplicemus per radicem 3, tertium verò per ejus quadratum 9, at quartum per cubum 27, qui antèa divisor extitit, habebimus quatuor illos proportionales qui ad æquationem de E superiùs expositam, pertinent, quorum primus erit in utraque serie idem $2950 + 7$; secundus $2918 + 3$; tertius $29162 - 9$; & tandem quartus, $2936450 - 189$. Horum quatuor, differentia mediorum est $12 - 2972$; is autem est numerus E quæsitus in æquatione, qui numerus, si tandem per 3 multipli-

ctetur, per eum scilicet numerum cujus beneficio deprefsa est fuprà æquatio de A, & ad æquationem de E redufta: dabitur numerus A quem initio quærebamus; & is erit idem qui antea 36 — 79648, fed multò breviori multòque fimpliciori methodo inventus, propter quam tamen non eft quodd, qui illam callucrit, nimum arroganter fuperbiat.

Hic quærere poffet aliquis, an detur certa aliqua regula quâ dignoscamus num binomia aut apotomæ radices habeant cubicas explicabiles, & quomodo illæ eruantur.

Sciat igitur ille talem dari regulam, quam non abs re fuerit paucis indicare. Ac primùm, ponamus binomium aut apotomen propositam, effe primi vel fecundi, quarti vel quinti ordinis, tum fic fiet:

Ex quadrato majoris nominis dematur quadratum minoris, ac tum fi differentia reperiatur effe cubus numerus habens radicem minimè furdam, fed unitati commenfurabilem, benè eft, nec alia præparatione eft opus: fin fecùs, tunc aliqua præparatione utendum eft, de qua dicemus poftea. Ponamus ergo prædictam differentiam habere radicem cubicam, quæ radix vocetur B planum; at majus nomen binomii aut apotomes, vocetur M folidum; minus autem vocetur N folidum: tum alterutra ex fequentibus duabus æquationibus cubicis folvatur, nempe

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M^3. &+ \frac{1}{4} B P. A - A^3 \propto O, \\ \text{vel } \frac{1}{4} N^3. &- \frac{1}{4} B P. A - A^3 \propto O: \end{aligned}$$

prior quidem, fi binomium vel apotome primi vel quarti ordinis extiterit; pofterior autem, fi fecundi vel quinti. Talis autem æquationis radix reperiri debet effe numerus minimè furdus, atque ideo inventu facillimus. Quodd fi illa radix non reperiatur effe rationalis, feu

unitati commensurabilis, tunc certò pronuntiare licebit, binomium aut apotomen non habere radicem cubicam explicabilem. Est ergo illa cubica æquationis radix numerus rationalis integer vel fractus, tunc illa priori quidem æquatione erit majus nomen, à cujus quadrato si dematur B planum, relinquetur quadratum minoris nominis, ex quibus nominibus constituetur binomium vel apotome: atque hæc vel illud erit radix cubica quæsitæ. At secunda æquatione radix erit minus nomen, cujus quadrato si addatur B planum, fiet quadratum minoris nominis; atque ab illis nominibus constitutum binomium vel apotome, erit radix cubica quæ queritur.

Jam verò existente binomio vel apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, quadrata nominum non differant cubo numero, sed quocunque alio: tunc hac præparatione utemur. Differentia illa quæ cubus non est, vocetur C^a , ac per eandem differentiam multiplicetur utrumque propositorum nominum binomii vel apotomes cujus radix investigatur, putà M^f . & N^f .; hac enim multiplicatione habebimus binomium aliud vel aliam apotomen ejusdem ordinis, cujus quadrata nominum cubo numero different. Atque omninò non refert quis sit multiplicator per quem multiplicentur nomina M^f . & N^f . modò quadrata nominum inde ortorum cubo numero differant; is ergo multiplicator, quicunque ille sit, vocetur C^a . sive ille sit idem qui supra, sive non; est tamen primus communiter simplicissimus.

Talis ergo binomii vel apotomes tali multiplicatione constitutæ radix cubica inveniatur ea methodo quam jamjam tradidimus mediante æquatione cubica convenienti: tum radix inventa dividatur per C^a . hoc est per radicem cubicam C^a . quæcunque sit illa radix, surda, vel rationalis; quotiens enim talis divisionis dabit radicem cubicam initio quæsitam.

Ponamus tandem propositum binomium vel apotomen, esse tertii, vel sexti ordinis; atque, ut suprà, majus nomen esto M^f . minus autem N^f . & C^a . esto differentia quadratorum nominum ipsorum. Tum inveniatnr numerus aliquis D^f , qui multiplicans C^a . faciat cubum, multiplicans autem vel M^f , vel N^f . faciat quadratum: (dantur infiniti tales numeri, & facillè inveniuntur) ac per D^f , hoc est per radicem quadratam numeri D^f , multiplicetur utrumque nominum M^f . & N^f .; tali enim multiplicatione orietur aliud binomium vel alia apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, cujus quadrata nominum different cubo numero; illius ergo radix cubica (si illa explicabilis sit) habebitur per præmissam regulam mediante congruenti æquatione cubica; ut dictum est: hæc ergo radix cubica divisa per D , hoc est per radicem solido-solidam, seu cubo-cubicam numeri D^f , dabit radicem cubicam binomii vel apotomes, cujus nomina sunt M^f . & N^f , quam invenire propositum erat.

Plurima super hac re dici poterant; sed nos regulam pulcherrimam indicare duntaxat, non minutatim persequi volumus, & quæ dicta sunt sufficient Analytæ non omnino rudi ad cætera detegenda.

Nec est quòd quis dicat, hoc modo proponi obscurum per obscurius explicandum, dum inventionem radicis cubicæ alicujus binomii vel apotomes ad resolutionem æquationis cubicæ reducimus. Quandoquidem enim talis æquationis solutio reperiri debet numerus rationalis integer vel fractus (aliàs enim, si surdus existat non erit radix binomii vel apotomes explicabilis) non aliter, nec majori difficultate solvetur æquatio illa, quàm simplex divisio absolvenda esset; quod sanè callescere debet quicumque Analysim vel mediocriter coluerit. Legatur Victa lib. de Æquationum recognitione &

emendatione, ac præcipuè capite illo quo æquatio sic transmutari potest, ut coefficientis sit quæ præscribitur: statuatur enim coefficientis unitas; tum verò solidum comparationis erit cubus aliquis suo latere auctus vel multatus: cætera plana sunt, unde nihil ultrà addemus.

Hoc exemplo satis declaravimus quid requiratur ad hoc ut problema aliquod arithmeticum, arithmetice solutum dici possit: qua de re tantis operibus egerunt Vieta, Cardanus, Bombellius, Tartalia, & alii quidam illustres præteriti sæculi viri, inter quos longè excelluit ipse Vieta, dum talium problematum solutionem, non quidem singularem pro singulis problematis, sed universalem pro qualibet specie problematum, per species ad id à se inventas inquisivit.

Neque abs re fuerit Analystam monere, quæstionem omnem in numeris propositam, in qua ex datis quibusdam numeris, alius aliquis numerus quæritur secundum leges quasdam in eadem quæstione præscriptas, semper esse quæstionem singularem; atque etiam si illa ad æquationem analyticam revocata, ad æquationes cubicas, aut ad altiores pertinere videatur: tamen non temerè statim pronuntiandum esse, talem quæstionem solidam esse aut linearem, sæpissimè enim accidit, ut illa vi inductionis logicæ plana sit; dico vi inductionis logicæ, quoties scilicet solutio illius datur in numeris qui logicà inductione inità, necessariò reperiuntur. Ut si experiar num æquatio aliqua de unitate sit explicabilis; num de binario, num de ternario, de quaternario, quinario, senario, &c. neque enim in infinitum abit tale experimentum, quandoquidem, ex hypotesi, numeri in ipsa æquatione expressi sunt, qui radicem quæsitam intra certos ac præfinitos terminos coercent. Aut si certà aliquà conjecturà deprehenderim illam, non de integro numero, sed de fracto explicabilem esse, cujus numeri

fracti denominator ex recognitione ipsius æquationis innotescat : tum inductione factâ, quæram numeratorem binarium, ternarium, quaternarium, quinarium, senarium, septenarium, &c. donec illum invenero, qui experiundo satisfaciât propositæ quæstioni; neque enim rursus in infinitum abit tale experimentum. Eodem modo, si ex recognitione talis æquationis deprehendero ipsam nec de integro numero, nec de fracto explicari posse, sed de surdo aliquo, cujus tales ex ipsa recognitione innotescant conditiones, ut ille, quamquam surdus, inductione factâ detegi possit : tales omnes æquationes planæ cenferi debent, non autem solidæ aut lineares, sub quarum specie aliquâ contineri primo intuitu apparuerunt. Ac planè talis existit præmissa æquatio cubica numerica, in qua satis jamjam immorati sumus, quæ tamen prima fronte alicui minùs perito Analystæ, solida quædam quæstio ex iis quæ insolubiles vulgò censentur, potuit apparere.

Nunc ergo ad geometriam redeamus, & quid geometricum sit, aut cenferi debeat explicemus. Geometricum in universum vocamus quodcunque intelligibile est in materia geometrica, nullâ habitâ ratione sensuum externorum, putà visus, auditus, tactus, gustus, vel olfactus, nisi quatenus illi intellectum movere possunt ad suas operationes exercendas. Verbi gratiâ, dum species visibilis circuli alicujus materialis in oculum incidens visum movet, illa ex occasione causâ esse poterit cur intellectus ab illo sensu excitatus talem figuram considerandam suscipiat, ac multas easque insignes proprietates detegat, atque evidenter ex certis atque indubitatis principiis demonstret. Ejusmodi igitur cognitio ab intellectu elicita, atque in ipso intellectu residens tanquam species aliqua intellectiva circa materiam geometricam, est id quod geometricum appellamus.

Materia verò gemetrica est omne extensum quatenus extensum, & quidquid ad illud pertinet sub eadem ratione; quales sunt termini illius, quales figuræ, quales rationes & portiones magnitudinum ad invicem, & si quid aliud ad tale argumentum pertineat. Itaque lineæ omnes, omnesque superficies quæ certis atque intellectu planè perceptis regulis describuntur, omnino geometricæ sunt, sicuti & figuræ quæcunque talibus lineis, ac talibus superficiebus continentur. Nec refert quòd illæ omnes lineæ, superficies, & reliquæ, mediante motu aliquo vel simplici vel composito, ut plurimum sub intellectum cadant. Nam primùm, motus ille, sive sit puncti alicujus, ad lineam aliquam describendam, sive sit alicujus lineæ ad describendam superficiem, sive superficiæ ad solidum describendum, est simpliciter intelligibilis; non autem sensu externo perceptibilis, nisi quatenus ad meram praxim refertur, quæ sensus externos respicit, nec ad puram geometriam, hoc est purè intelligibilem, reducitur; sed & puncta, lineæ, aut superficies quæ moveri intelliguntur, purè sunt geometricæ, abstrahuntque à materia sensibili; & per spatium purè geometricum, atque à materia sensibili abstrahunt, motus suos perficere intelliguntur, transeuntque à termino noto ad notum terminum per notum medium, secundum leges notas, & clarâ ac distinctâ intellectus notione, aut firmo ratiocinio stabilitas; aliàs enim, nisi has fortiantur conditiones, illæ tanquam spurix, atque à Geometria prorsus alienæ respuuntur.

Secundò, etiamsi, qui rerum geometricarum minùs periti sunt, putent lineas, superficies, & solida, motu punctorum, linearum, & superficieum reverà gigni, ita ut iidem existiment magnitudines illas tum primùm esse incipere, cum primùm à tali motu producuntur: tamen ei qui rem penitus inspexerit, manifestò patebit illam longè aliter se habere; quippe, posito tantum spatio geometrico omnimo-

dè

ad extensio, (illud autem spatium, etiam nemine cogitante, in rerum natura ponitur) ponuntur statim tales magnitudines in tali spatio, etiam nemine cogitante & abstrahendo ab omni motu, atque omnes simul in ipso existunt absque omni intellectus operatione. At motus ad hoc inservit, ut per omnes partes ipsarum magnitudinum intellectum successivè perducendo, illum faciliùs ad earumdem cognitionem pertrahat. Sic enim comparatus est humanus intellectus, ut vix quippiam, præcipuè si extensum est, simul ac totum apprehendat, sed tantùm successivè ac per partes; quod sanè est motu intellectivo moveri per tale extensum, nec tamen illud motu ipso in rerum natura ponitur, sed tantùm eodem mediante intelligitur, cùm priùs absque omni motu, atque ab intellectu independentè extaret.

Cùm ergo Euclides sphæram, conum, ac cylindrum; cùm Apollonius superficiem conicam; cùm Archimedes sphæroidem, conoidem, & helices; cùm alii conchoïdes, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, atque innumeras ejusmodi lineas & figuras per motus describunt; immò quidam lineam rectam per motum puncti, & circulum per motum rectæ lineæ: illi omnes sic intelligendi sunt, ut voluerint magnitudines ipsas priùs existentes, eodem modo quo à se conciperentur, aliorum intellectui exponere, seu ostendere; quod cùm aliter faciliùs non possent, hoc modo per motus, vel simplices, vel compositos omninò feliciter effecerunt.

Rursùs, quòd quædam lineæ aut quædam superficies, beneficio instrumentorum mechanicorum faciliùs describantur, quædam difficiliùs, id non facit ut illæ magis, hæ minùs sint geometricæ: ejusmodi enim mechanicæ descriptiones praxim respiciunt, & ad sensus externos referuntur, non autem ad puram Geometriam, quæ, ut sæpè diximus, solum respicit intellectum.

Quòd etiam ex iisdem lineis aut superficiebus, quædam simpliciores, quædam verò magis compositz intellectui videantur; id etiam non impedit quin hæ & illæ æquè geometricæ dici debeant; quippe illud non ex natura talium magnitudinum, sed ex debilitate intellectus humani procedere manifestum est: ex nostra autem imperfectione rerum natura non immutatur.

Demus itaque hoc humanæ imbecillitati, quòd quæ simpliciore modo, saltem nostro respectu, solvi poterunt, eo solvi debeant; & contra talem regulam peccasse censeatur quisquis, cùm simpliciore loco uti posset, ad magis compositum recurrerit. Dicemus autem paulò post de distinctione locorum in magis aut minùs simplices ex constitutione Geometrarum qui nos hac in re præcesserunt, ut sic quis cuique quæstioni locus proprius sit innotescat.

Sed ut magis elucescat in hac materia locorum, nec facilitatem descriptionis, nec maiorem aut minorem simplicitatem intellectiōis alio modo attendendam esse quàm respectu imbecillitatis intellectus humani: videamus quis sit Geometriæ finis in locis ipsis constituendis. Constat autem nullum alium finem apud Geometras reperiri, nisi ut talium locorum beneficio ea detegant quæ intellectui latebant, ut quod verum est, verum esse; quod falsum est, falsum esse; quod fieri potest, fieri posse, & quo modo, & quot modis, manifestum fiat, idque semper in materia geometrica; quod tamen non impedit ne talis cognitio postea materiæ sensibili applicetur. Ac planè ejusmodi loci primò & per se quædam sunt cognoscendi instrumenta; secundariò verò, & per applicationem mechanicam, illi sunt instrumenta faciendi. Et quidem, quòd ad cognitionem, scientiam, vel intelligentiam attinet, sive illa faciliùs, sive difficiliùs acquiratur, & sive per media simplicia, sive per compo-

sita, modò talia media sint clarè ac distinctè nota, qualia sunt quæ principiis purè geometricis innituntur, ita ut ab ejusmodi principiis incipiendo, & per media ipsa progrediendo, tandem ad intelligentiam illam deveniamus: certum est eandem fore perfectam, nec in genere intelligentiarum aut scientiarum, perfectiorem fore aliam, quamquam facilioribus aut simplicioribus mediis acquisitam. Atque omninò una eademque intelligentia seu scientia est, sed diversis mediis acquisita; quæ media, si faciliora aut simpliciora sint, vel secùs, hoc ex debilitate intellectus humani repetendum est; aliàs enim, si perfectà esset humana intelligendi potentia, tunc vel mediis non egeremus, vel certè & principia cognitionis, & media omnia, sed & ipsam cognitionem uno intuitu, nullo prorsùs labore nullaue difficultate haberemus, nec simplicis aut compositi ulla esset ratio.

Jam verò, si ad materiam sensibilem, seu ad praxim mechanicam applicetur cognitio aliqua geometrica, ita ut inde oriatur opus aliquod externum ex tali materia constans, multò minùs media aut operandi rationem accusabimus in ipso opere jam confecto, si illud his aut illis mediis æque benè absolutum sit; nec ullo jure tali respectu quis dixerit hæc aut illa media esse respuenda tanquam erronea ac minimè legitima, sed tantùm alia aliis esse præferenda; quippe faciliora difficilioribus, & simpliciora magis compositis: quod sanè ex nostra agendi debilitate rursùs repetendum est; secus enim, positâ perfectâ agendi potentiâ, tunc agens & media & opus ipsum nullo labore consequeretur, ac proinde nec facilitatis nec difficultatis, sicuti nec simplicioris nec magis compositi ratio haberetur.

Propositum locum geometricum ad æquationem analyticam revocare, & qui simpliciores sint loci, aut secùs, explicare.

DICITUR locus aliquis geometricus ad æquationem analyticam revocari, cùm ex una aliqua, vel ex pluribus ex illius proprietatibus specificis, quædam deducitur æquatio analytica, in qua una vel duæ vel tres ad summum sint magnitudines incognitæ.

Ac duplici quidem modo talis locus ad talem æquationem revocari potest. Primus modus absolutus est, alter respectivus.

Modus absolutus dicitur ille in quo unicus proponitur locus per se absolute ac nullo aliorum respectu considerandus, ita ut æquatio ex eo deducta ad ipsam præcisè pertineat, non verò ad ullum alium.

Modus respectivus ille est in quo duo communiter, aliquando etiam, sed rarò, tres vel plures loci proponuntur inter se comparandi, ut ex eorum sectione, vel tactione, vel datâ aliquâ distantia, vel omninò ex præscripta aliqua conditione, vel inter ipsos habitudine deducatur æquatio aliqua analytica quæ ad omnes istos locos simul tali respectu pertineat; ita tamen ut nihil referat si æquatio illa ad alios etiam locos pertinere possit.

Et hi quidem modi ambo admodum universales sunt, continentque sub se singuli infinitos particulares modos, non solùm habita ratione multitudinis locorum geometricorum qui & genere, & specie, & numero infiniti sunt, sed etiam in unico ex talibus locis dantur plerumque innumeri tales modi, ex quorum singulis innumeræ æquationes deduci possunt; siquidem tot dabuntur modi particulares, quot dabuntur diversæ loci illius proprietates specificæ; unde numerus talium modorum

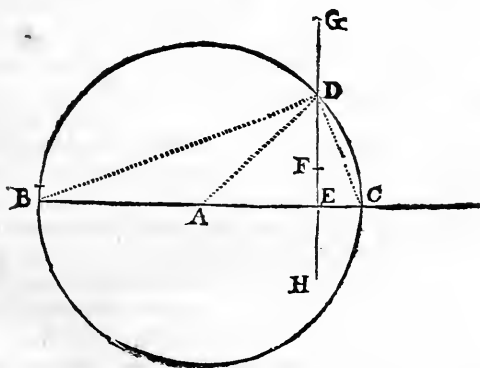
non magis finitus est, quàm artificis in indagandis proprietatibus vis & industria; sed & ex infinita locorum ipsorum complicatione, id est, sectione, tactione, &c. innumeri etiam oriuntur modi respectivi, siquidem duorum tantum diversimodè complicatorum modi nullo certo aliquo numero comprehendi possunt.

At verò, etiamsi nullus ex talibus modis ad nostrum institutum inutilis dici possit, si scilicet ad abundantiam doctrinæ respiciamus: tamen si necessitatis tantum ratio habeatur, paucissimi sufficiunt, iique non admodum intricati aut difficiles existunt.

Dicamus ergo pauca, primùm de modo absoluto, tum de respectivo, atque utrumque, selectis aliquibus exemplis ex locis nobilioribus desumptis, illustremus.

DE CIRCULO.

PROPONATUR ergo primùm circulus cujus centrum sit *A*, circumferentia *BDC*, & sit una dia-



metrorum BC, ad quam referre oporteat omnia circumferentiæ puncta, mediante aliqua æquatione analytica; ac fundamentum hujus relationis esto proprietas illa, quòd omnis recta, putà DE, cadens à circumferentia in diametrum ad rectos angulos, sit media proportionalis inter portiones diametri BE, EC; hæc ergo proprietas specifica dabit unum aliquem ex modis particularibus circa circumulum. Ex illo modo innumera deducuntur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

Prima Æquatio.

AB esto	$b,$	Item AB esto	$b,$
DE	$a,$	DE	$a,$
DE quadratum	$a^2,$	DE quadratum	$a^2,$
BE	$e,$	CE	$e,$
EC	$2b - e,$	BE	$2b - e,$
BEC rectang.	$2be - e^2.$	BEC rectang.	$2be - e^2.$
Ergo æquatio,		Unde æquatio critur suprâ,	
$+ 2be - e^2 \propto a^2,$		$+ 2be - e^2 - a^2 \propto 0.$	
vel			
$+ 2be - e^2 - a^2 \propto 0.$			

Itaque propositâ lineâ curvâ BDC, atque ab eadem in aliquam rectam utrinque terminatam BC, demissâ perpendiculari DE; si talis reperiatur æquatio qualem jam invenimus: tum pronuntiare licebit ejusmodi curvam esse circuli circumferentiam; est enim reciproca proprietas, & simpliciter converti potest quæ de illa concipitur propositio, ut satis facillè consideranti apparebit. Omnis autem recta data referre poterit $2b$.

Quòd si loco circumferentiæ circuli assumpta esset ellipsis; tum sub iisdem speciebus, $2be - e^2$ fuisset ad a^2

in data ratione majoris aut minoris inæqualitatis, nempe ut transversum latus ad rectum, quam rationem supponimus esse datam. Conversa etiam vera est.

Rursus, si DE in BC incidisset ad angulos obliquos, reliquis ut supra positis, in omni ratione haberetur ellipsis. Sed hæc ex conicis clara sunt.

Secunda Æquatio.

Iisdem positis: ex DE detrahatur data EF quæ vocetur c , & DF vocetur i , atque ideò DE quadratum erit $+c^2 + 2ci + i^2$. Unde iisdem vestigiis insistendo, talis erit æquatio, $+2be - e^2 \propto c^2 + 2ci + i^2$, vel $-c^2 + 2be - e^2 \propto 0$.

Itaque ex tali vel simili æquatione concludemus circuli circumferentiam: immò, si $+c^2 + 2ci + i^2$ vocetur una specie a^2 ; (species enim illa de i quadrata est) tunc in primam æquationem omninò incidemus, ut manifestum est. Vicissim, facile erit ex prima in hanc secundam devenire.

De ellipsi eadem quæ supra enuntiabimus.

Hæc æquatio non est reciproca, unde eam in ordinem non reduximus; siquidem ex illa non minùs ellipsim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet: quod etiam infrà satis patebit.

At verò ad tales æquationes reduceretur alia quæ sequitur $+2be - n^2 \propto 0$, intelligatur enim n^2 majus esse quàm e^2 & differentia eorum vocetur a^2 . Fiet ergo manifestò hæc æquatio $+2be - e^2 - a^2 \propto 0$, & hæc est prima præcedentium, ex qua ad secundam facilè deducemur. Hic autem longitudo n æqualis erit rectæ BD, vel CD, cujus quadratum æquale est, vel duobus quadratis BE, DE simul; vel duobus CE, DE simul, quandoquidem ipsum n^2 æquale ponitur esse duobus simul $a^2 + e^2$.

Tertia Æquatio.

Iisdem positis, eidem DE addatur in directum quævis DG; & tota EG data sit sub specie c , & DG ignota vocetur i ; atque idè DE quadratum erit $c^2 - 2ci + i^2$. Unde iisdem vestigiis, $+ 2be - e^2 \propto c^2 - 2ci + i^2$, vel per antithesim, $-c^2 + 2be - e^2 \propto -2ci + i^2$, vel per antithesim, $-c^2 + 2be - e^2 \propto 0$.

Ex tali ergo vel simili æquatione concludemus circulum.

Quòd si recta DG sit data sub specie c , & EG ignota vocetur i : tunc iisdem vestigiis in eandem prorsus æquationem incidemus. Idem accidet, si DE producatursus E in H, & vel tota DH sit c , EH autem sit i , vel è contrario, EH sit c , DH autem sit i .

Jam, vel $c - i$, vel $i - c$ esto a ; quo pacto dabitur prima æquatio, ut manifestum est.

Sicut autem secta est DE in F, vel producta in G vel H: sic potuit secari vel produci CE, & vel ipsâ solâ manente DE insectâ & sine productione, vel etiam utraque tam CE quàm DE; quod satis per se atque ex præmissis clarum est. Idem de BE quàm de CE dictum esto.

Quarta Æquatio: ex eo quòd omnes rectæ à centro circuli ad ejus circumferentiam ductæ, sint æquales.

Iisdem positis, esto AE ignota sub specie y ; & quoniam AD seu AB est b , & DE est a , idè talis erit æquatio, $b^2 \propto a^2 + y^2$, sive $b^2 - a^2 - y^2 \propto 0$. Itaque, ex ejusmodi æquatione concludemus circulum, quia illa reciproca est.

Jam verò, ut suprâ, esto a æqualis, vel $c + i$, vel $c - i$; vel

vel $i - c$, prout scilicet vel EF erit c , & DF erit i ; vel EG erit c , & DG erit i ; vel DG erit c ; & EG erit i : tumque habebimus alterutram ex duabus sequentibus æquationibus $+b^2 - c^2 - 2ci - i^2 \propto 0$, vel $+b^2 + 2ci - i^2 \propto 0$: ex quibus circulum quoque concludere licet, modò sub similibus speciebus proponantur; sic enim illæ sunt reciproæ, seu specificæ.

Eodem modo hîc AE secari vel produci poterit quo suprà dictum est de ED, BE, vel CE.

Quòd si proponatur aliqua ex his tribus $+d^2 - fi - u^2 \propto 0$, vel $+d^2 + fi - u^2 \propto 0$, vel $-d^2 + fi - u^2 \propto 0$: tunc licebit illas ad alterutram ex duabus præmissis postremis reducere. Nam $+d^2$ intelligetur æquale esse $+b^2 - c^2$, vel $-d^2$ æquabimus $+b^2 - c^2$; at $-u^2$ ponemus æquale esse $+i^2 - y^2$: unde sequetur id quod propositum est.

Non sunt tamen illæ tres reciproæ; siquidem ex illis non minùs ellipsim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet. Licebit autem quartam hanc æquationem ad primam aut ad duas sequentes reducere, posito quòd $b - y$ sit e , ut satis patebit ei qui attendere voluerit. Et reciprocè, tres priores poterunt ad quartam reduci, posito quòd $b - e$ sit y .

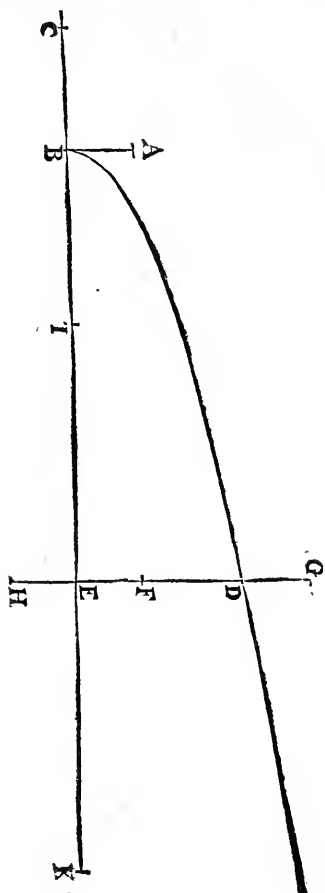
Hæc de circulo ad æquationem analyticam reducto, pauca quidem, sed ea præcipua sufficiant. Nunc pauca etiam de parabola dicamus.

DE PARABOLA.

ESTO parabola BD, cujus latus rectum sit AB, diameter BE, sive illa sit axis, sive non; atque ad hanc diametrum ordinatim applicata sit DE. Oporteat

Rec. de l'Acad. Tome VI.

E c



autem omnia parabolæ puncta referre ad diametrum BE, mediante aliquâ æquatione analyticâ, ac fundamentum relationis esto proprietas illa, quòd quadratum applicatæ cujuscvis, putà DE, æquale sit rectangulo contento sub latere recto AB & sub BE portione diametri interceptâ inter verticem B & ordinatam DE; quæ proprietas parabolæ specifica est, dabitque modum unum particularem ex quo multæ deducuntur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

Prima Æquatio.

AB esto b ,
DE a ,
DE quadratum a^2 ,
BE e ,
ABE rectangulum be .

Æquatio,

$$be \propto a^2,$$

vel

$$be - a^2 \propto 0.$$

Itaque, propositâ curvâ aliquâ BD, atque in ea sumpto quovis puncto D; tum ductâ quâpiam rectâ BE quæ ad unas quidem partes B terminetur ad eandem curvam, ad alteras autem partes sit indefinita: si ducta recta DE datâ cuiuspiam rectæ terminatæ AB parallela, media proportionalis sit

inter AB, BE: pronuntiabimus curvam illam esse parabolam. Est enim reciproca proprietas, ex vi hyporhefis, quòd DE sit semper datâ parallela; aliàs enim posset æquatio præmissa circulum exhibere, ut notatum est ad secundam circuli æquationem, dum proposita est æquatio $2be - a^2 \propto 0$. Hoc autem planè manifestum est.

Secunda & tertia Æquatio.

Nec aliter habebuntur secunda & tertia æquatio; quàm in circulo dictum est, divisâ scilicet DE in F, aut Ee ij

eâdem productâ in G vel H; quo pacto talis erit secunda æquatio $be \propto c^2 + 2ci + i^2$, vel $-c^2 + be - 2ci - i^2 \propto 0$, atque id ex divisa DE.

Tertia autem æquatio ex DE productâ talis erit $be \propto +c^2 - 2ci + i^2$, vel $-c^2 + be + 2ci - i^2 \propto 0$.

Et hæc quidem omnes æquationes sub speciebus exhibitis sunt reciproca, existente rectâ DE datâ alicui rectæ semper parallelâ; unde ex quavis illarum parabolam concludere semper licebit, speciebus tamen immutatis.

Quòd si rectâ BE dividatur in I, vel eadem producat, sive versùs B in C, sive versùs E in K, reliquis eodem modo quo suprà positis, multæ inde orientur æquationes, quædam scilicet manente DE indivisa ac sine productione, reliquæ autem ipsâ DE divisâ vel productâ. In exemplo enim esto BE divisâ, ac BI esto data sub specie d , IE autem esto y ; unde rectangulum sub AB, BE, quia æquale est duobus simul, ei scilicet quod continetur sub AB, BI, & ei quod continetur sub AB, IE, talem inducet speciem $bd + by$: itaque positâ DE indivisâ sub specie a , talis erit æquatio $bd + by \propto a^2$, vel $bd + by - a^2 \propto 0$. At positâ DE divisâ sub specie $c + i$, æquatio erit ejusmodi $bd + by \propto c^2 + 2ci + i^2$; vel $bd - c^2 + by - 2ci - i^2 \propto 0$. Quod si CB sit data sub specie d , CE autem sit y , erit ipsius BE species $y - d$: contrâ autem, si CE sit d , & CB sit y , erit ipsius BE species $d - y$; hinc autem facile erit reliquas æquationes deducere, atque ex singulis, sub iisdem speciebus, parabolam concludere.

Ad prædictas autem æquationes reduci poterunt quæcunque ad circulum suprà, tam directè quàm indirectè pertinebant, si species debite atque ex arte permutentur: at propter talem permutationem, æquationes illæ erunt

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM. 221
reciproca. Sed hoc indicasse sufficiat; nunc ad hyperbolam progrediamur.

DE HYPERBOLA.

EX infinitis modis quibus hyperbola aliqua ad rectam quandam referri potest, duo videntur præcipui: alter quidem, cum illa ad aliquam ex suis diametris refertur; alter autem, cum illa refertur ad unam ex suis asymptotis.

Esto hyperbola BD, cujus vertex sit B, rectum latus AB, transversum BC, centrum L in medio ipsius BC, cæteris ut supra in parabola positis. (Vide figuram parabolæ, & finge esse hyperbolam) nisi quod distinctionis gratiâ, species transversî lateris hic erit f , unde CEB rectanguli species erit $fe + e^2$. Est autem in omni hyperbola tale rectangulum ad quadratum cujusvis ordinatæ DE ut transversum latus ad rectum: in speciebus ergo, ut f ad b , ita $fe + e^2$ ad a^2 . Ductis itaque extremis inter se, tum etiam mediis inter se, fiet æquatio universalis ad omnem hyperbolam pertinens.

Prima Æquatio.

$$bfe + be^2 \propto fa^2, \text{ sive } bfe + be^2 - fa^2 \propto 0.$$

Ex tali igitur æquatione concludemus hyperbolam cujus latus rectum erit b , & transversum f , existente a ordinatâ ad diametrum, e verò intercepta inter ordinatam & verticem, sive diameter sit axis, sive non, prout angulus ad E rectus erit vel obliquus.

Secunda Æquatio.

Secunda æquatio ex divisa DE in F, ita ut species
Ec iij

rectæ DE sit $c + i$, talis erit, $bfe + be^2 \propto fc^2 + 2cfi + fi^2$, sive $fc^2 + bfe + be^2 - 2cfi - fi^2 \propto 0$.

Tertia Æquatio.

Tertia æquatio ex DE productâ in G vel H, ita ut species ipsius DE sit $c - i$, vel $i - c$, talis erit $bfe + be^2 \propto fc^2 - 2cfi + fi^2$, sive $fc^2 + bfe + be^2 + 2cfi - fi^2 \propto 0$.

Poterit autem non tantum recta BE, sed etiam recta DE, vel utraque dividi, vel produci; unde multæ nascentur æquationes magis intricatæ, quas, quia vix utiles esse possunt, curioso Analystæ relinquimus.

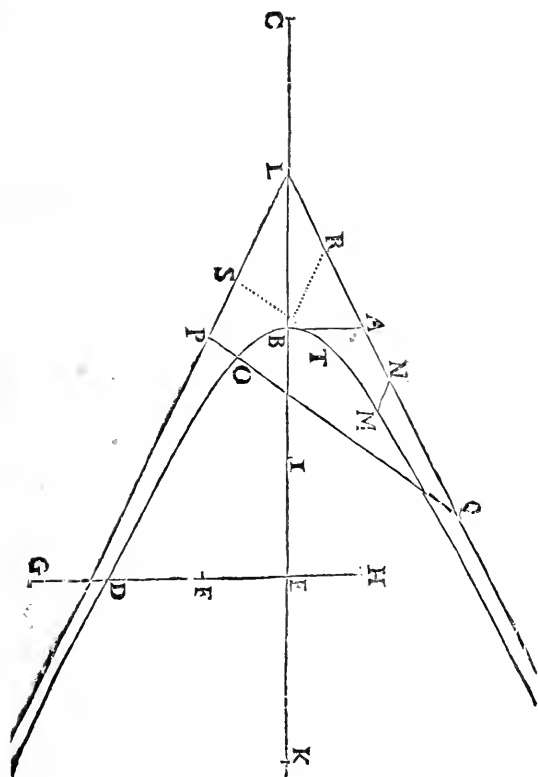
Quarta Æquatio.

Speciatim verò resumamus primam hyperbolæ æquationem, putâ $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$, & ponamus transversum latus f æquale esse lateri recto b , quod accidit in quacunque hyperbola cujus asymptoti sunt ad angulos rectos. Itaque divisâ æquatione per f vel b , fiet hæc æquatio simplicior, $be + e^2 - a^2 \propto 0$, vel $fe + e^2 - a^2 \propto 0$.

Ex tali ergo æquatione concludere licebit hyperbolam rectangulam, cujus latus rectum erit b , ordinata a , sive ad axem, sive ad aliam quamcunque diametrum, & latus transversum erit f æquale ipsi b , e autem erit quævis intercepta inter applicatam seu ordinatam & verticem.

At ex hac speciali ac simplici æquatione multæ aliæ deduci possunt, si scilicet dividatur DE in F, vel ipsa DE producat in G vel H, vel si BE dividatur in I, aut ipsa eadem BE producat in K vel in L; vel rur-

sùs, si utraque tam DE quàm BE dividatur aut producat, vel denique multis aliis modis, pro majori & majori Analystæ sagacitate.



Quinta Æquatio.

Resumamus adhuc primam hyperbolæ æquationem, nempe $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$, oporteatque talem æquationem reddere simplicem, ita tamen ut illa ad quamcunque hyperbolam pertineat.

Intelligatur esse ut b ad f , ita a^2 ad u^2 , unde fa^2 æquale erit ipsi bu^2 . Itaque in æquatione, loco ipsius fa^2 succedat ipsum bu^2 , & omnia applicentur ad b , ac tum $fe + e^2 - u^2 \propto 0$.

Ex tali ergo æquatione licebit non solum hyperbolam rectangulam, ut suprà, directè concludere, sed etiam per fictionem poterimus eandem æquationem ad quamcunque hyperbolam extendere, cujus latus transversum sit f , latus autem rectum sit recta quævis, & e sit quæcunque intercepta inter ordinatam & verticem; at ordinata non erit u (nisi si latus rectum æquale ponatur esse lateri transverso f , ut fiat hyperbola rectangula.) Verùm ut ipsa ordinata habeatur, fiet ut transversum latus f , ad rectum quod vocabimus b , ita u^2 ad aliud quod vocabitur a^2 , ac tum a erit ipsa ordinata: hoc autem ex præmissis manifestum est. Ex tali enim analogia fiet $fa^2 \propto bu^2$: at in æquatione simplici proposita habemus $fe + e^2 - u^2 \propto 0$; quibus per b multiplicatis invenitur $bfe + be^2 - bu^2 \propto 0$. Jam loco ipsius bu^2 succedat fa^2 , & sic tandem fiet prima hyperbolæ æquatio nempe $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$.

Porro ad prædictas æquationes reduci poterunt quæcunque suprà ad circulum & ad parabolam directè aut indirectè pertinebant, si species debite atque ex arte permutterentur, ut convenientem sortiantur interpretationem: at propter talem mutationem non erunt reciproæ æquationes illæ; omninò enim nulla æquatio re-

ciproca

reciproca est, nisi sub iisdem omnino speciebus sub quibus illa ad locum aliquem directè pertinet.

In analysi speciosa communiter liberum est ex infinitis hyperbolarum speciebus eam eligere quam libuerit: quo sanè casu præstabit rectangulam assumere, propter illius maiorem simplicitatem. Aliquando etiam sectio ipsa ex hypothese data est, sed rarò, putà cum beneficio analyticos quæritur aliqua ejusdem sectionis proprietates, ut si quis ex dato puncto extra axem datæ sectionis, minimam rectam quæ ad ipsam sectionem duci possit inquirat, incidet ille in æquationem solidam quæ solvi poterit beneficio circuli & hyperbolæ, ita ut vel circulus quivis, vel quæcunque hyperbola ad arbitrium eligi possit. Eligetur ergo ipsa hyperbola data, cui circulus conveniens ex arte accommodabitur: aliàs enim peccatum multi existimarent, si neglectà ipsâ hyperbolâ datâ, assumeretur vel alia hyperbola vel parabola vel ellipsis, ut liberum est in omni æquatione solida; at hunc rigorem, ut elegantiores, concedimus, sic non omnino necessarium existimamus, propter rationes suprà allatas, cum quid geometricum censeretur debeat examinare.

Sexta Æquatio.

Iisdem positis, sunt hyperbolæ asymptoti LN, LP ad angulum quemcunque; atque ex vertice B ducatur recta, BR parallela uni asymptoto LD, quæ BR occurrat alteri asymptoto LN in puncto R. Itaque, ex hypothese quòd data sit hyperbola, data quoque erit utraque LR, RB, unde & rectangulum sub ipsis datum est, sit species illius b^2 . Tum sumpto in hyperbola quocunque puncto M, ducatur recta MN parallela cuivis asymptoto, putà LP, occurrentque alteri LN in puncto N; atque species rectæ LN esto a , species autem rectæ

Vide Figur. sequentem.

NM esto e . Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum sub LR, RB æquale est rectangulo sub LN, NM: dabitur hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica $b^2 \propto ae$, seu $b^2 - ae \propto 0$.

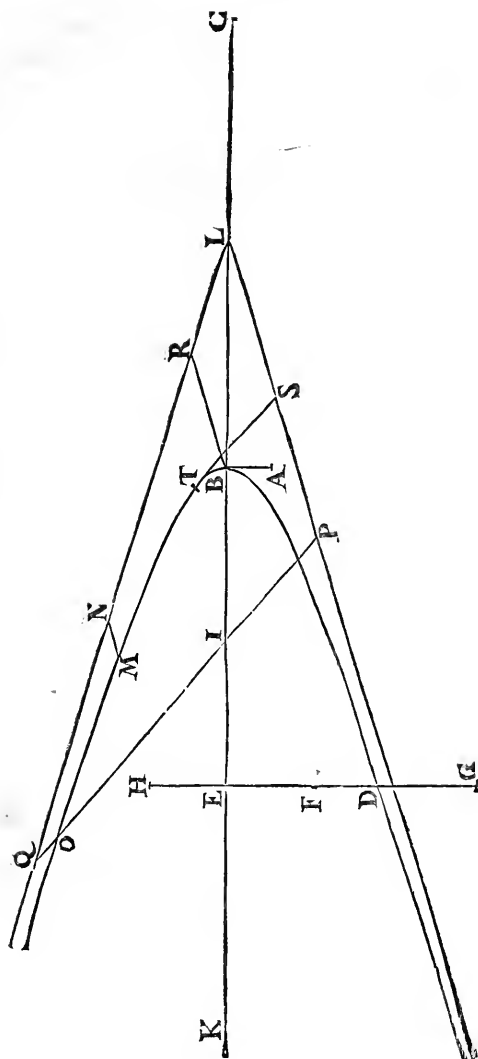
Ex tali ergo æquatione semper hyperbolam concludere licebit, cujus b^2 erit rectangulum sub LR, RB, at a erit quævis portio unius asymptotæ, putà LN ad centrum terminata, e verò recta intercepta inter hyperbolam & alterum ipsius speciei a extremum, quæ tamen recta e alteri asymptoto parallela existet, putà asymptoto LP existente e ipsâ rectâ MN.

Quòd si recta LN dividatur vel producat, ut species illius sit vel $c + i$, vel $c - i$, vel $i - c$, manente NM indivisâ; aut si hæc NM dividatur vel producat, ut species illius sit $d + u$, vel $d - u$, vel $u - d$ manente LN indivisâ, aut si utraque LN, NM dividatur, aut utraque producat, aut denique altera earum dividatur, altera producat: habebuntur inde multæ æquationes inventu faciles, atque omni hyperbolæ specificæ; unde ex qualibet illarum hyperbolam concludere licebit.

Apparet quoque tales æquationes ad quæcunque hyperbolam posse pertinere, nisi aut angulus asymptotæ datus sit, aut rectum latus, aut transversum, aut alia quædam proprietas, quæ cum dato b^2 , hyperbolæ ipsius specie determinare possit.

Septima Æquatio.

Iisdem adhuc positis, ducatur quæcunque recta POQ secans hyperbolam in O, asymptotos autem in P & Q; atque illi PQ parallela existat TS tangens hyperbolam in T, occurrensque alteri asymptotæ, putà LP in S; & data sit positio & magnitudine ipsa TS, cujus species



fit b , ex hypothefi quòd hyperbola fit quoque data; fit etiam recta OP species a , recta verò OQ species esto e . Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum POQ æquale est quadrato tangentis TS, fiet hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica $b^2 \propto ae$, seu $b^2 - ae \propto 0$.

Ex tali ergo æquatione, eadem quæ suprà in sexta concludere licebit, atque id tam divisim ipsis PO, OQ, quàm iisdem productis.

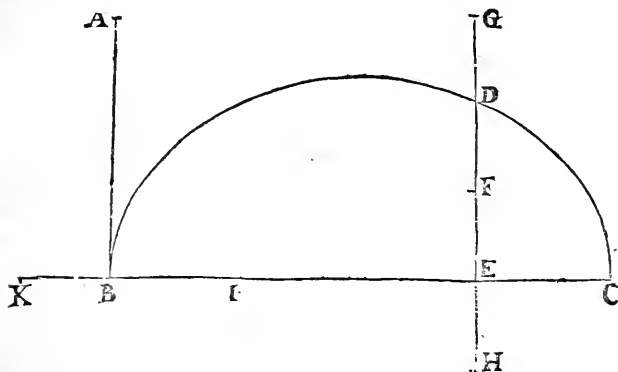
DE ELLIPSI.

IN ellipfi præcipuæ æquationes non multum differunt à tribus circuli prioribus æquationibus, ut ibi monuimus. Omnino autem, non alio modo se habet circulus ad ellipses, quo hyperbola rectangula ad alias hyperbolas minimè rectangulas. Sicuti ergo in tali hyperbola rectangula æquatio simplex fuit, quæ respectu totius generis hyperbolarum composita extitit, sic in circulo, prædictæ priores tres æquationes simplices fuere, quæ in genere ellipsoidium fient compositæ. At illud hic breviter exponamus.

Prima Æquatio.

Esto ellipsis BD, cujus vertex B, rectum latus AB, diameter BC, sive illa sit axis sive non, DE ordinata ad illam diametrum, cui parallela sit AB; species autem ipsius AB esto b ; ipsius BC, f ; ipsius DE, a ; ac tandem ipsius BE, e : unde rectanguli CEB species erit $fe - e^2$. At in omni ellipfi, ut diameter BC ad latus rectum AB, ita rectangulum CEB ad quadratum DE; itaque in speciebus, ut f ad b , ita $fe - e^2$ ad a^2 ; hinc æquatio $bfe - be^2 \propto fa^2$, sive $bfe - be^2 - fa^2 \propto 0$.

Poterit autem vel recta BE, vel recta DE, vel utraque dividi vel produci; unde multæ nascentur æquationes inventu non admodum difficiles; sed id indicasse sufficiat.



Ex ejusmodi ergo æquationibus semper ellipsim concludere licebit, cujus latus rectum erit b , diameter f , ordinata ad diametrum a , vel quæcunque ipsam a in æquatione referet, ac tandem intercepta inter ordinatam & verticem erit e , vel quæcunque ipsam e in æquatione referet. Immo, dabitur quoque ipsius ellipsis species, ex hypothese quod angulus ABC vel DEC datus sit; si tamen angulus ille rectus esset, & rectæ b & f æquales, loco ellipsis haberemus circulum: quod demonstrare non erit difficile.

Secunda Æquatio.

Potest præmissa prima æquatio reddi simplicior, si fiat ut b ad f , ita a^2 ad u^2 ; unde $f a^2 \propto b u^2$. Itaque

Ff iij

in æquatione illa, loco ipsius fa^2 succedat illi æquale $b u^2$, ac tum $bfe - be^2 - bu^2 \propto 0$: omnia applicentur ad b , fietque æquatio simplex $fe - e^2 - u^2 \propto 0$.

Et hæc quidem æquatio directè pertinet ad circulum; at indirectè & per fictionem pertinere poterit ad quamcunque ellipsum, cujus diameter erit f , latus autem rectum erit recta quæcunque; at verò ordinata non erit u , (nisi latus rectum æquale sit ipsi f diametro, & angulus DEC obliquus) sed ut ipsa habeatur ordinata, fiet ut f ad latus rectum quod vocabimus b , ita u^2 ad aliud quod vocetur a^2 , ac tum a erit ipsa ordinata; ex tali enim analogia fiet $fa^2 \propto bu^2$: at æquatio simplex erat $fe - e^2 - u^2 \propto 0$, quâ in b ductâ, fit $bfe - be^2 - bu^2 \propto 0$. Jam loco ipsius $b u^2$ succedat ipsi æquale fa^2 , & sic tandem fiet prima ellipsis æquatio $bfe - be^2 - fa^2 \propto 0$.

Ad prædictas æquationes reducentur quæcunque suprâ ad circulum, ad parabolam & ad hyperbolam directè pertinebant, si species debitè atque ex arte permulentur, at iis conditionibus de quibus sapius suprâ dictum est.

Corollarium.

IN omnibus præmissis æquationibus liquidò constat, quatuor curvas ex quibus illæ deductæ sunt, nempe circuli circumferentiam, parabolam, hyperbolam, & ellipsum ad suas diametros relatas eo modo quo suprâ, non transcendere secundum gradum, hoc est quadratum incognitarum magnitudinum a, e, i, u , &c. Quòd si quis easdem ad alias rectas quàm ad ipsas diametros referat, ille rursus in similes, sive ejusdem gradus æquationes incidet; unde in universum, ex talibus æquationibus aliquam ex ipsis quatuor curvis semper concludere licebit: & hoc sufficit ad omnia loca plana & solida Anti-

quorum inveniendæ & componendæ; si tamen his æquationibus pauca addantur quæ pertinent ad lineas rectas, dum illæ ad alias rectas referuntur, quæ sanè æquationes ipsum eundem secundum gradum non excedunt; at verò ad hanc inventionem & compositionem requiritur Analysta non vulgaris. Sed hoc etiam indicasse sufficiat: nunc pauca de locis linearibus ad æquationes geometricas absoluto modo revocatis supersunt dicenda, quod nos in conchoïde Nicomedis tantum exequemur, siquidem illa etiam in sequentibus ad nostrum institutum satis erit, videturque eadem esse locorum omnium linearum simplicissimus.

DE CONCHOÏDE NICOMEDIS.

ET si multa sint linearum curvarum genera quæ in infinitas species multiplicentur, tamen hac in parte, conchoïdum genus omnia alia genera longissimè, immò infinities infinitè superat. Siquidem nulla datur curva ex quâ infinitæ conchoïdes deduci non possint, atque omnes specie, immò etiam genere differentes; ac præterea, cujuscvis conchoïdis infinitæ rursus dantur conchoïdes specie ac genere inter se distinctæ, ita ut propositâ quâcunque curvâ putà circuli circumferentiâ, statim ex ea innumeræ conchoïdes deducantur, quæ quamquam genere inter se distinctæ, tamen omnes sint primi cujusdam ordinis; tum ex unaquaque illarum innumeræ rursus aliæ nascantur genere diversæ, quæ omnes secundi cujusdam ordinis existant, ex quibus singulis eodem modo innumeræ tertiæ cujusdam ordinis oriuntur; atque ita in infinitum infinities abit talis multiplicatio.

Nos verò ex omnibus illis generibus duo tantum selegere decrevimus, quæ quamquam simplicissima exis-

tant, tamen illa per se singula ad æquationes analyticas quinti ac sexti gradus, hoc est quadrato-cubicas ac cubo-cubicas solvendas sufficiunt; ita ut beneficio cuiusvis illorum generum possit angulus quicumque rectilineus in quinque partes æquales dividi. Horum generum prius erit illud cuius conchoïdes vulgò vocantur à Nicomede earum inventore, suntque conchoïdes circulares primi ordinis, de quibus Eutocius in Archimede, necnon alii permulti authores scripsere; quandoquidem per medium talis conchoïdis Nicomedes ipse famosissimum problema de cubo duplicando solvere aggressus est, quamquam sanè modo non usque ad eò legitimo, cum tale problema ad lineas simpliciores, putà conicas, pertineat: solidum enim illud est tantum, at conchoïdes omnes sunt loci lineares. Alterum duorum generum conchoïdum nostrarum erit parabolicarum, de quibus primus egisse putatur Renatus *des Cartes* in sua Geometria, qui etiam modo prorsus legitimo iisdem usus est ad problemata analytica sexti gradus solvenda, ad quem gradum illa quoque ascendere cogit quæ sunt quinti gradus; quod sanè ei liberum, at non omninò necesse fuit, sed modum quo aliter ab iis se expediret, aut non advertit, aut aliqua de causa neglexit.

In his duobus conchoïdum generibus hoc notatu dignum accedit, quòd quamquam simplicius sit circulare quàm parabolicum, si linearum genitricium ratio habeatur, (simplicior enim est circuli circumferentia quàm parabola) tamen, cum ad æquationes ventum fuerit, reperiuntur illæ in conchoïde parabolica simpliciores quàm in circulari; non quidem ratione gradûs ad quem illæ ascenderunt, qui in utraque suâ naturâ sextus est existente æquatione universali, sed ratione multiplic-tatis affectionum, seu homogeneorum per signa $+$ & $-$ distinctorum; at illud magis in sequentibus patebit.

Cum

Cum autem dicimus ejusmodi conchoïdes ad sextum gradum pertinere, hoc intelligendum est dum illæ ad æquationes analyticas revocantur modo respectivo, non autem simplici seu absoluto; quod etiam rursus infra clariùs innotescet.

Antequàm ad æquationes accedamus, pauca præmittenda sunt de natura conchoïdum in universum; tum etiam pauca de conchoïde circulari in specie.

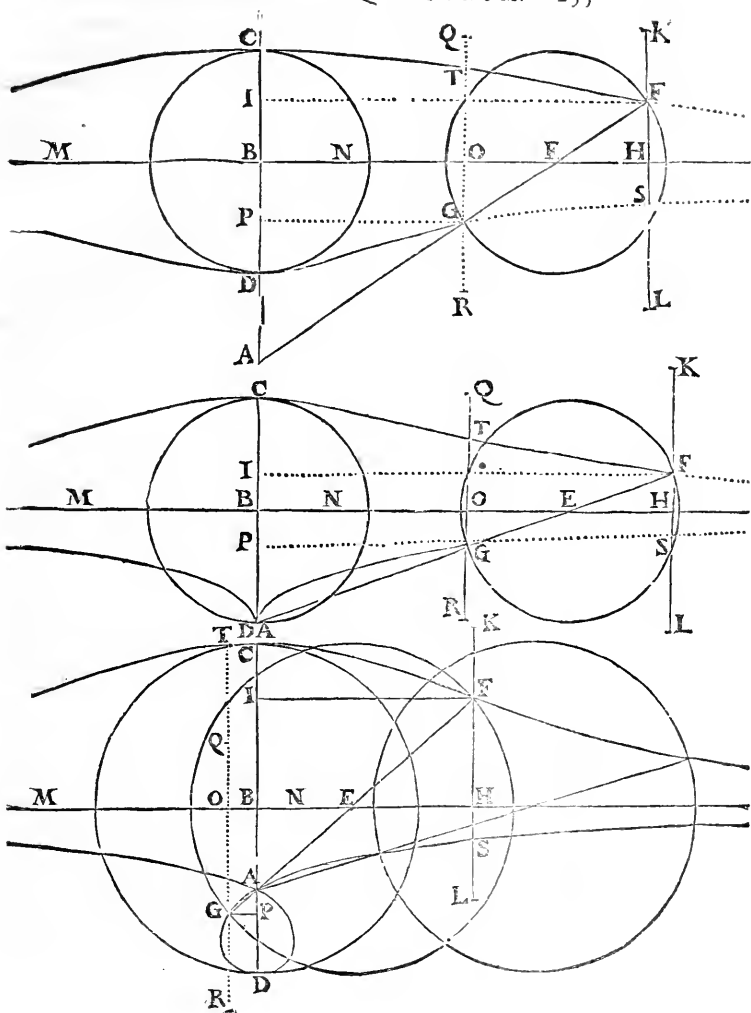
In universum ergo concipiatur quavis linea curva in plano jacens, quod planum moveri possit unà cum eadem curva motu quolibet tam lationis quàm circumvolutionis: hæc linea vocetur genitrix, à qua conchoïdes describenda denominabitur, planum verò postea vocabitur planum mobile; in hoc plano mobili notetur punctum quodcunque intra vel extra genitricem, quod vocetur polus mobilis: per hunc polum transeat quædam linea recta quæ circa talem polum liberè moveri possit, & tamen in ipso plano semper jaceat, ut recta illa sit instar regulæ mobilis quam communiter nomine Arabico vocare solent *albidadam* in permultis instrumentis; hanc postea vocabimus regulam. Concipiatur deinde quæcunque linea, recta vel curva, in aliqua superficie jacens, (nos hanc superficiem planam assumimus, quam tamen curvam etiam assumere licebit) quæ superficies, quia immobilis statui debet saltem ad faciliorem intelligentiam, dicatur superficies immobilis; & linea in ea concepta dicatur semita, quandoquidem per illam ac secundum eandem moveri debet polus plani mobilis, dum planum illud postea motu lationis secundum præscriptas leges aliquas deferetur. Præterea, in superficie immobili extrà semitam, ultrà citràve, notetur punctum quodcunque quod vocetur polus immobilis, circa quem movebitur regula de qua jam dictum est, ita ut eadem per duos polos, mobilem scilicet & immobilem, perpetuè

transeat, jaceatque interim semper in plano mobili.

His positis, si statuamus planum mobile cum immobili, ita ut polus mobilis existat in semita, & regula per utrumque polum transeat, tum moveatur planum mobile secundum certam quandam ac constitutam legem, quæ tamen lex ad arbitrium Geometræ initio pender, modò postea illa inviolatam servet, polo mobili secundum semitam delato, neque ab ea usquam evagante, notenturque interim puncta in quibus regula genitricem secat, ac per omnia illa sectionum puncta, linea duci intelligatur: hæc erit conchoïs de qua nunc agimus.

Fieri autem potest, ac reverà fit sapissimè, ut in una eademque plani mobilis atque ideò linear genitricis positione, regula ipsam genitricem in duobus vel pluribus punctis secet; unde etiam accidit non rarò, ut conchoïs inde orta non sit unica linea continua, sed duplex, triplex, aut multis modis multiplex, ita ut partes illius aliquando, etiam in infinitum productæ, nunquam sibi invicem occurrant; aliquando, è contrario, illæ partes se fecent, & aliquando eadem se tangant tantum: sed & illud fieri potest, ut aliqua positione, regula linear genitrici nullo modo occurrat, quo pacto conchoïs non erit ad utramque partem infinitè extensa, vel certè ipsa erit interrupta, non verò continua. Sed hæc indicasse sufficiat in tam vaga atque multiplici linearum infinitis modis infinitarum descriptione.

In specie. Ponamus in aliqua ex tribus his figuris, planum mobile esse illud in quo est circulus cujus diameter est CD vel GF; atque in eo plano lineam genitricem esse ejusdem circuli circumferentiam; polum mobilem esse ipsius centrum B vel E, & regulam esse rectam AB, vel AE. Ponamus deinde planum immobile esse id in quo est recta BE in infinitum utrinque producta, quæ recta eadem sit semita per quam feratur



polus mobilis B vel E, atque unà cum ipso planum mobile deferens circulum CD vel GF, polus verò immobilis in hoc plano immobili esto A, per quem transeat regula AB vel AE.

Manifestum est ergo, quòd dum centrum circuli, five polus mobilis feretur secundum semitam BE, regula per hunc polum mobilem ac per immobilem A semper transiens, positionem suam continuò mutabit. Jam lex motus esto, ut planum mobile semper inter movendum jaceat secundum suam planitiem in plano immobili; hæc enim lex sola sufficit ad certam atque indubitatam descriptionem. Hoc pacto, quia in quacunque circumferentiæ genitricis positione, regula ipsam circumferentiam in duobus punctis, nec pluribus, semper secat, quorum punctorum unum est ad unas partes semitæ versùs polum immobilem A, quale est punctum D vel G, alterum ad alteras partes ejusdem semitæ, quale est C vel F: fit necessariò ut conchoïis circularis inde orta componatur ex duabus lineis ad utrasque partes semitæ BE existentibus, quarum linearum unaquæque ex utraque parte in infinitum extenditur sic ut semita utriusque asymptotos existat. Illæ lineæ in figuris præmissis sunt CTF, DGS, quarum exterior CTF (exteriorem voco eam quæ respectu poli immobilis A jacet ad alteras partes semitæ BE) circa verticem C, ad aliquam distantiam ex utraque parte ipsius verticis, interiùs cava est versùs semitam BE: est autem vertex C punctum id in quo recta AB ad semitam BE perpendiculariter producta occurrit ipsi conchoïdi; at ultra talem distantiam mutatur cavitatis ipsa, fitque ad partes exteriores, convexitas verò respicit semitam usque in infinitum. At conchoïis interior DGS, præter id quod de exteriori jam diximus, quibusdam accidentibus obnoxia est, prout recta AB vel

femidiametro DB major est, vel eidem æqualis, vel ipsâ major; existente enim AB majore quàm DB, idem accedit quod de exteriori jamjam attulimus, quodque in prima trium figurarum satis apparet; existentibus verò rectis AB, DB æqualibus, ut in secunda figura, tunc conchois interior ad punctum A vel D qui vertex est, angulum constituit quolibet acuto rectilineo minorem, ut sic conchois ex duabus lineis ad verticem AD sese tangentibus componi videatur, quarum utraque ad partes semitæ BE semper convexa est usque in infinitum. Verùm, existente rectâ AB minore quàm DB, ut in tertia figura, tunc conchois inter puncta A, D ita involvitur, ut spatium comprehendat laquei instar, cujus funiculi postquàm ad punctum A decussatim sese secuerunt, abeunt ex utraque parte in infinitum, ita tamen ut convexitas eorum ad partes semitæ BE semper respiciat.

Sic ergo se habet conchois circularis Nicomedis. Quòd si polus mobilis non sit centrum circumferentiæ genitricis, sed quodvis aliud punctum in plano mobili assumptum: fient aliæ conchoïdes circulares à prædicta & se invicem diversæ in infinitum; quod tamen indicasse sufficiat. Sed & semita poterit esse non recta linea ut BE, verùm alia circuli circumferentia in plano immobili jacens; quo etiam pacto aliæ atque aliæ conchoïdes circulares gignentur, quales habentur apud Vietam in supplemento Geometriæ, quamquam sanè idem, sicuti de Nicomede diximus, modo non usque adeo legitimo quàm par fuerat usus est, in solvendis scilicet problematis suâ naturâ solidis, cùm conchoïdes illæ sint loci lineares. Sed hoc rursus indicasse sufficiat, ut inde possit quivis colligere quàm immensa sit conchoïdum, etiam circularium, omnium inter se specie differentium multitudo; nunc ad æquationes analyticas mo-

do absoluto, ipsam Nicomedeam revocemus, ut protinus ad conchoïdem parabolicam deveniamus. Itaque in conchoïde exteriori CTF cujusvis ex tribus figuris præmissis sunt species:

$$\begin{array}{ll} AB & b, \\ BC, EF & c, \\ FH, BI & a, \\ FI, BH & e, \end{array}$$

Et quoniam ut recta AI ad IF, ita est FH ad EH: erit in speciebus,

$$\text{ut } b \text{ ad } a \text{ ad } e, \text{ ita } a \text{ ad } \frac{a e}{b + a}$$

$$\text{EH} \quad \frac{a e}{b + a}$$

$$\text{EH quadratum} \quad \frac{a^2 e^2}{b^2 + 2ba + a^2}$$

Ponitur autem triangulum EFH esse rectangulum. Hinc æqualitas in quadratis laterum,

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2 e^2}{b^2 + 2ba + a^2}$$

& omnibus in communem divisorem ductis,

$$b^2 c^2 + 2b c^2 a + c^2 a^2 \propto b^2 a^2 + 2b a^3 + a^4 + a^2 e^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 + 2b c^2 a + \frac{c^2 a^2}{b^2 a^2} - 2b a^3 - a^4 - a^2 e^2 \propto 0;$$

unde ex tali æquatione sub iisdem speciebus licebit pronuntiare ipsam æquationem ad conchoïdem circulearem Nicomedis exteriorem pertinere.

Neque verò in conchoïde interiori DGS magna erit differentia; omnibus enim ritè ordinatis differet æquatio, non quidem speciebus, sed specierum affectionibus secundùm signa $+$ & $-$, idque in quibusdam affectionibus tantùm, ut ex formula sequenti apparet. Sunto ergo species:

$$\begin{array}{ll} \text{AB esto} & b, \\ \text{BC, EF, EG} & c, \\ \text{GO, BP} & a, \\ \text{GP, BO} & e, \end{array}$$

$$\text{Ut } b - a \text{ ad } e, \text{ ita } a \text{ ad } \frac{ae}{b-a}$$

$$\text{OE} = \frac{ae}{b-a}$$

$$\text{OE quadratum} = \frac{a^2 e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$$

Ponitur autem triangulum EOG esse rectangulum. Unde fiet æqualitas in quadratis laterum, nempe

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2 e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$$

& omnibus ductis in communem divisorem,

$$b^2 c^2 - 2bc^2 a + c^2 a^2 \propto b^2 a^2 - 2ba^3 + a^4 + a^2 e^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 - 2bc^2 a + \frac{c^2 a^2}{b^2 a^2} + 2ba^3 - a^4 - a^2 e^2 \propto 0.$$

Itaque ex ejusmodi æquatione sub iisdem speciebus concludemus conchoïdem circularem Nicomedeam interiorem, ex qua æquatio illa ortum duxerit.

Porrò multis modis, immò innumeris, variari possunt magnitudines ignotæ a & e ; quippe si altera earum vel ambæ datâ magnitudine augeantur vel minuantur, ut factum est suprà in circulo, parabola, hyperbola, & ellipsi. Einge enim productam esse HF in K, ita ut FK data sub specie d , HK autem in specie sit i ; tum verò HF erit in speciebus $i - d$ quæ priùs erat a ; unde loco speciei a & graduum ejus in æquatione, substitui poterunt $i - d$ & gradus ipsius; quo pacto fiet alia quæpiam æquatio à præmissis diversa, ac multò pluribus nominibus constans, quæ sub suis speciebus ad conchoïdem Nicomedis perrinebit. Idem etiam concludemus si FH producat in L, & ipsius HL species sit d , ipsius autem FL species sit i , sic enim rursus HF erit in specie $i - d$, &c. Quòd si iisdem productis, HK vel FL data sit sub specie d , & ipsius FK vel HL species sit i , erit ipsius FH species $d + i$ quæ priùs erat a ; unde, &c. ut suprà.

Supple punctum V. in figura.

Potuit etiam dividi FH in V, ita ut ex duabus portionibus FV, VH, altera, putà VH, data esset sub specie d , altera FV ignota sub specie i ; atque ita ipsius HF species fuisset $d + i$ quæ priùs erat a ; unde, &c. ut suprà.

Nec minùs produci potuit recta FI vel HB in M, vel eadem dividi in N. Sed hoc indicasse sufficiat.

Eodem modo ratiocinabimur de rectis GO & GP vel OB, quo de rectis FH & FI vel HB, ut manifestum est.

Infinitos modos relinquimus, quia prædictos sufficere putavimus, ad hoc ut quivis suoapte ingenio quotvis alios, ut libuerit, inquirat, & analyticè prosequatur.

*Appendix ad Isagogen topicam continens solutionem
Problematum solidorum per locos.*

PATUIT methodus quâ lineæ locales deteguntur : inquirendum restat quâ ratione Problematum solidorum solutio possit ex supradictis elegantissimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites suos evagandi licentia. Infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfit in locis : commodissimè igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur, secant quippe se invicem duæ lineæ locales positione datæ, & punctum sectionis positione datum quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit. Exemplis breviter & dilucidè res explicatur.

Proponatur a cubus $+ b$ in a quadratum æquari z plano in b .

Commodè utraque æqualitatis pars potest æquari solido b in a in e , ut per divisionem istius solidi, illinc per a , hinc per b res deducatur ad locos. Cùm igitur a cubus $+ b$ in a quadratum æquetur b in a in e , ergo $a^3 + b$ in a æquabitur b in e :

Et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius e ad parabolam positione datam.

Deinde cùm z in b æquetur b in a in e , ergo z æquabitur a in e .

Et erit ex nostra methodo extremitas ipsius e ad hyperbolam positione datam. Sed jam probavimus esse ad parabolam positione datam. Ergo datur positione, & est facilis ab analysi ad synthesein regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis. Constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab a adfectis, ex altera solido omninò dato, vel etiam

cum solidis ab a vel a^q affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadrato-quadratorum.

$a^q q + b^f \text{ in } a + z^p \text{ in } a^q \propto d^p p$: ergo $a^q q \propto d^p p$
 $- b^f \text{ in } a - z^q \text{ in } a^q$ æquentur hæc duo homogenea
 $z^q \text{ in } e^q$.

Cùm igitur $a^q q$ æquetur $z^q \text{ in } e^q$: ergo per subdivisionem quadraticam, a^q æquabitur $z \text{ in } e$, & erit extremitas E ad parabolam positione datam.

Deinde cùm $d^p p - b^f \text{ in } a - z^q \text{ in } a^q \propto z^q \text{ in } e^q$, omnibus per z^q divis,

$$\frac{d^p p - b^f \text{ in } a}{z^q} - a^q \propto e^q.$$

Et erit ex nostra methodo extremitas E ad circulum positione datum; sed est & ad parabolam positione datam : ergo datur.

Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato-quadraticæ. Expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione sub cubo & quadrato-quadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolam, circulum vel hyperbolam solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportionem,

Sint duæ rectæ B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ, fiet a cubus $\propto b^q \text{ in } d$, posito nempe quòd major mediarum ponatur a .

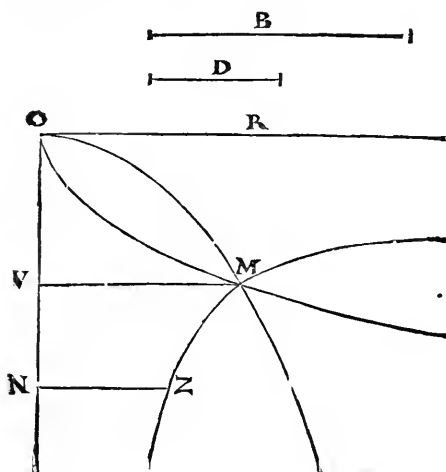
Æquentur singula homogenea $b \text{ in } a \text{ in } e$.

Illinc fiet $a^q \propto b \text{ in } e$.

Istinc $a \text{ in } e \propto b \text{ in } d$.

Ideoquæ quæstio per hyperbolæ & parabolæ intersectionem perficietur.

Exponatur enim recta quævis positione data OVN in qua detur punctum O . Sint rectæ datæ B & D inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta OV æquari a , & recta VM ipsi OV ad rectos angulos æquari e . Ex priori æqualitate, quæ a æquatur b in e , constat per punctum O tanquam verticem, describendam parabolam cujus rectum latus sit b , diameter ipsi VM parallela & applicatæ ipsi OV : tranſibit igitur hæc parabola per punctum M .



Ex ſecunda æqualitate quæ b in d æquatur a in e , ſumatur punctum ubilibet in recta OV , ut N , à quo excitetur perpendicularis NZ , & fiat rectangulum ONZ æquale rectangulo b in d . Excitetur perpendicularis OR . Circa aſymptotos RO , OV deſcribenda hyperbola per
H h ij

punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur positione, & transibit per punctum M. Sed parabola etiam quam suprà descripsimus datur positione, & per idem punctum M transit: datur igitur punctum M positione, à quo si demittatur perpendicularis MV, dabitur punctum V, & recta OV major duarum continuè proportionalium quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem parabolæ & hyperbolæ.

Si ad quadrato-quadrata lubeat quæstionem extendere, omnia ducantur in a , tunc a^3 æquabitur b in d in a .

Æquantur singula homogenea juxta superiorem methodum b in e .

Fient duæ æqualitates, nempe a^3 & b in e .

Et d in a & e .

Quæ singulæ dabunt parabolam positione datam. Fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio & posterior sunt apud Eutocium in Archimede, & huic methodo facilimè redduntur obnoxia.

Abeant igitur illæ parapleroses Vietæ quibus æquationes quadrato-quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice plana; pari enim elegantia, facilitate & brevitate solvuntur, ut jam patuit: perinde quadrato-quadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor, elegantius.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en constructionem omnium problematum cubicorum & quadrato-quadraticorum per parabolam & circulum.

Ponatur $a^3 + z^3$ in $a \propto d^3$: ergo $a^3 \propto -z^3$ in $a + d^3$. Fingatur quadratum abs $a \propto -b$, aut alio quovis quadrato dato, fiet quadratum $a^3 + b^3$

— bq in aq bis. Addantur ad supplementum singulis æqualitatis partibus bqq — bq in aq bis : fiet $aqq + bqq$ — bq in aq bis $\propto bqq$ — bq in aq bis — z^f in $a + dpp$; fit bq bis $\propto nq$, & singulis homogeneis siue partibus æqualitatis æquetur nq in eq : fiet illinc per subdivisionem quadraticam aq — bq $\propto n$ in e ; ideóque punctum extremum e erit ad parabolam ex nostra methodo : isthinc fiet,

$$\frac{bqq}{nq} - aq - \frac{z^f \text{ in } a + dpp}{nq} \propto eq.$$

Ideóque ex nostra methodo, punctum extremum e erit ad circulum. Descriptione igitur parabola & circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facilimè ad omnes casus tam cubicos quàm quadrato-quadraticos extenditur. Curandum est tantum ut ex una parte sit aqq ; ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab a cubo. At per expurgationem Vietæam omnes æquationes quadrato-quadratica ab affectione sub cubo liberantur; ergo eadem in omnibus methodus. Cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab adfectione sub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in a ductis, fiet æquatio quadrato-quadratica, cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo; ideóque solvetur per superiorem methodum.

Id solum in secunda æqualitate curandum est, ut aq ex una parte, ex altera eq sub contraria affectionis nota reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus, aqq $\propto z^p$ in aq — z^f in d . Fingatur quodvis quadratum abs aq — quovis quadrato dato ut bq , fiet $aqq + bqq$ — bq in aq bis. Adjiciatur utrique æqualitatis parti ad supplementum bqq — bq in aq bis, fiet aqq .

Hh. iij.

$+ b^2 - b$ in a bis $\propto b^2 - b$ in a bis $+ z^2$ in $a - z^2$ in d .

Ut igitur commoda fiat divisio in secunda æqualitate, sumenda differentia inter b^2 bis & z^2 quæ sit verbi gratiâ n^2 , & utraque æqualitatis pars æquanda n^2 in e .

Ut illinc fiat $a - b \propto n$ in e .

$$\text{Istinc } \frac{b^2}{n} - a - \frac{z^2}{n} \text{ in } d \propto e.$$

Advertendum deinde b^2 bis debere præstare z^2 , alioquin a non afficeretur signo defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolam, cui primum remedium; b^2 enim ad libitum sumimus, ideóque ipsius duplum majus z^2 nullius est negotii sumere. Constat autem ex methodo locali, circulum creari semper ex æqualitate in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo $+$; in altera aliud quadratum ignotum signo $-$.

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit $a \propto b$ in d .

Et $a^2 \propto b$ in d in a .

Adjiciatur utrinque $b^2 - b$ in a .

$a^2 + b^2 - b$ in a æquabitur $b^2 + b$ in d in $a - b$ in a .

Sit $b \propto n$.

Et singulæ æqualitatis partes æquantur n^2 in e ,

Fiet illinc $a - b \propto n$ in e .

Ideóque extremum e erit ad parabolam.

Istinc fiet $b^{\frac{1}{2}} + d^{\frac{1}{2}}$ in $a - a \propto e$; ideóque extremum e erit ad circulum.

Qui hæc adverterit, frustra quæstionem mesolabii, trisectionis angularis, & similes tentabit deducere ex planis, hoc est per rectas & circulos expedire,

T R A I T E

D E S I N D I V I S I B L E S .

P O U R tirer des conclusions par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, ou selon quelqu'autre puissance.

Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes, on se servira de points; & puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles font toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour côté la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy, que la surface contient la moitié de l'espace que contiendrait le quarré qui auroit 4 de côté comme le triangle; & encore qu'il ne fallût pas 10 points pour achever le quarré, parce que le côté AB seroit commun à l'autre moitié du quarré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considérable, parce que le triangle n'excède jamais la moitié du quarré que

A •

• •

• • •

• • • • B

de la moitié de son côté : or y ayant une infinité de côtez audit quarré pris dans les indivisibles, la moitié d'un d'iceux n'entre pas en considération ; ainsi ce triangle-cy qui a 4 de côté n'excede la moitié du quarré collatéral, (c'est-à-dire qui a pareil côté) que de 2 qui est $\frac{1}{2}$ de ladite moitié, ou la moitié du côté. Si le triangle avoit 5 de côté, il n'excederoit que de $\frac{1}{2}$ de la moitié du quarré collatéral : s'il en a 6, il n'excedera que de $\frac{1}{6}$, & ainsi de suite ; & puisqu'on voit que l'excès diminuë toujours, il s'anéantira enfin dans la division indéfinie.

De même si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarez, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, feroit à la dernière prise autant de fois, comme la somme des quarez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3 ; car quoique prenant un nombre fini de quarez leur somme soit plus grande que le tiers du cube collatéral au plus grand quarré, néanmoins dans la division infinie elle ne feroit que le tiers ; car ladite somme ne passe jamais le $\frac{1}{3}$ du cube que de la moitié du plus grand quarré $+\frac{1}{6}$ du côté. Or dans le cube il y a une infinité de quarez, & partant la moitié d'un d'iceux n'est pas considérable, & encore moins $\frac{1}{6}$ de la ligne ou côté du même cube.

Ainsi le cube étant 64, pour avoir la somme des quarez dont le plus grand soit collatéral audit cube, on prendra le tiers d'icelui, sçavoir $21\frac{1}{3}$, auquel joignant la moitié du plus grand quarré, sçavoir 8, on aura $29\frac{1}{3}$, à quoi joignant encore $\frac{1}{2}$ de 4 qui est le côté, sçavoir $\frac{2}{3}$, on aura 30 pour la somme des quatre premiers quarez. Et ainsi par les proprietéz des puissances suivantes, on montrera que la somme des cubes est $\frac{1}{4}$ du quarré-quarré collatéral au plus grand cube ; que la somme des quarez-quarez est $\frac{1}{5}$ de la cinquième puissance ; que la

somme

somme des cinquièmes puissances est $\frac{1}{5}$ de la sixième puissance, & ainsi des autres. Mais il faut remarquer que les puissances ont ainsi rapport l'une à l'autre de proche en proche, & non point si on en omet une entre deux. Ainsi la ligne ou côté n'a point de rapport au cube, ni le carré au carré-carré, ni le cube à la cinquième puissance, &c. car les lignes prises à l'infini ne faisant qu'un carré, & y ayant une infinité de quarrés dans le cube, si l'on ajoute ou si l'on ôte un seul carré cela n'operera rien. La même chose se montrera du carré eû égard au carré-carré, & du cube eû égard à la cinquième puissance, &c.

La superficie se divise aussi en une infinité de petites superficies, lesquelles ou sont égales, ou ont une égale différence, ou gardent entr'elles quelqu'autre progression, comme de carré à carré, de cube à cube, de carré-carré à carré-carré, &c. Et d'autant que les superficies sont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les superficies, on comparera les lignes à une autre chose, & la somme de toutes les petites surfaces ou des lignes qui les représentent, sont à la grande surface prise autant de fois comme 1 à 3, comme il a été dit.

De même les solides se divisent en une infinité de petits solides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a été dit des surfaces : & d'autant que les solides sont terminez par des surfaces, au lieu de dire que ces petits solides sont au grand solide pris autant de fois, je dis, l'infinité des surfaces sont à la plus grande prise autant de fois, comme le cube au carré-carré de son côté, ou comme 1 à 4.

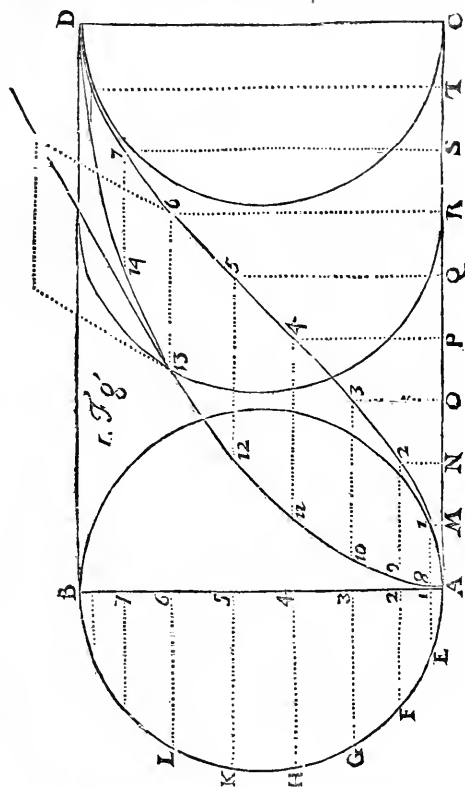
Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes, & compose la ligne entière. L'infinité de

lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité des superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOUS posons que le diamètre AB du cercle AEFGB se meut parallèlement à soy-même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamètre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamètre, en sorte que quand le diamètre est en CD, le point A est venu en B, & la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette course du diamètre se divise en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcourues par le diamètre, comme il a été dit. En après je considère le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamètre en avant, l'autre du sien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il est venu en E il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti; cette hauteur se marque tirant du point E au diamètre AB un sinus E_1 , & le sinus Versé A_1 est la hauteur dudit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F_2 , & A_2 sera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le sinus G_3 , le sinus Versé A_3 sera la hauteur de A quand il est parvenu en G; & faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que

parcourt A, je trouve toutes les hauteurs & élevezemens pardeffus l'extrémité du diamètre A, qui font $A_1, A_2,$



A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 ; donc, afin d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pen-
I i ij

dant les deux mouvemens, je porte toutes les hauteurs sur chacun des diamètres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M 1, N 2, O 3, P 4, Q 5, R 6, S 7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes sinus E 1, F 2, G 3, &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamètre, & je les tire vers le cercle, & des extrémités de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je sçai comme s'est fait la ligne A 8 9 D; mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, & ainsi toujours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamètre soit arrivé en CD; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémités AD. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'icelui; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des sinus E 1, F 2, &c. qui sont les mêmes que ceux des diamètres M, N, O, &c. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallélograme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD; & partant selon Archimède, la moitié est égale au cercle, auquel ajoutant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace A 8 9 D C; &

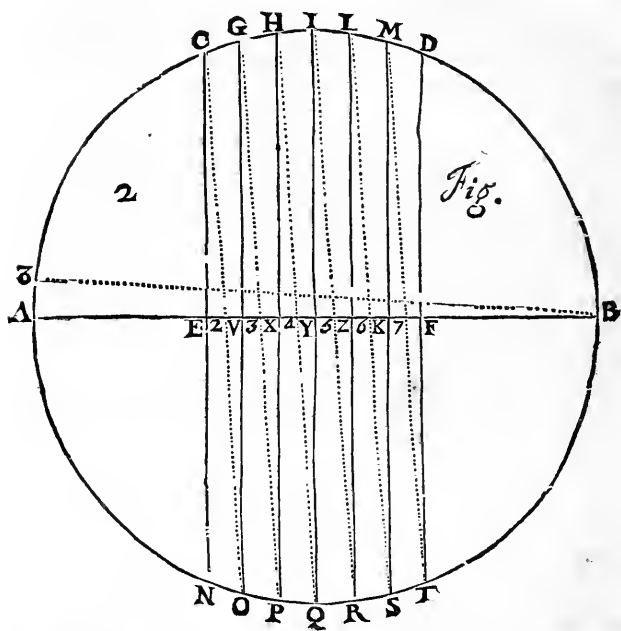
faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considère ensuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamètre marchant parallèlement à soy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallélogramme (qui doit toujours avoir les quatre côtes égaux lorsque le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamètre AB par la ligne AC) & si du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procède en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posez en quelqu'autre raison, comme si lorsque l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcourroit dans le même temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison.

P R O P O R T I O N
de la circonférence du cercle à son
diamètre.

SOIT le cercle AIBQ, son diamètre AB, & soient tirez les sinus CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF. Que les arcs CG, GH, HI, IL, LM, MD soient égaux: je dis que la ligne EF est à la circonférence CD, comme tous les sinus ensemble, sçavoir CE, GV & tous les autres, sont à autant de sinus totaux ou demi-diamé-

tres. Je le montre ainsi. Je continuë CE jusques en N,
GV jusques en O, & ainsi des autres. Je tire ensuite la
diagonale de C en O qui coupe la ligne EV en passant,
Je tire aussi toutes les autres diagonales, & partant je



fais des triangles semblables, auxquels triangles sembla-
bles les lignes DF & NE ne sont point employées, mais
cela n'importe à cause de la division infinie dans la-
quelle nul fini ne porte préjudice. Je tire par-après la

ligne B 8 faisant l'arc 8 A égal à CG ; & du point 8 j'abaisse la perpendiculaire 8 A pour avoir un triangle semblable aux triangles C₂, E, G₃ V, & aux autres suivans. Nous feignons que la circonférence CD est divisée par infinis sinus, & que la ligne à 8 A étant si proche de la circonférence 8 A, devient elle-même circonférence & égale à 8 A, ou à CG, & à chacune des autres qui ont été divisées en infini. De plus, nous disons que la ligne B 8 peut être tant approchée par une division infinie de la ligne AB diamètre, qu'elle devient elle-même diamètre.

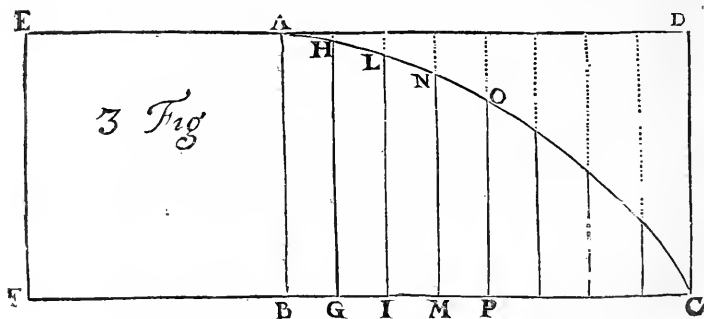
Puis on dira : Comme CE est à E₂, ainsi OV est à V₂, & ainsi de tous les triangles qui suivent la même règle. En après, le triangle CĒ₂ est semblable au triangle GV₃, parce qu'ils ont les angles C & G égaux, soutenant circonférences égales NO, OP, car toutes sont égales depuis N jusques en T, & partant comme tous les doubles sinus CN & autres sont à la ligne EF, ainsi CE à E₂ : or comme CE à E₂, ainsi B 8, qui est devenu diamètre, à 8 A devenu circonférence, qui sera égal à CG & aux autres. Ainsi, comme tous les sinus à la ligne EF, ainsi le diamètre B 8 devenu diamètre, à 8 A devenu circonférence ; & au lieu de dire 8 A, je dis CG ; & coupant les antécédens en deux, je dis, comme les sinus d'enhaut à la ligne EF, ainsi le demi-diamètre ou sinus total à CG ; & multipliant CG autant de fois que la ligne CD contient de divisions, tous les sinus d'enhaut seront à EF, comme autant de demi-diamètres ou sinus totaux qu'il y a de parties égales à CG depuis C jusques en D, sont à la circonférence CD : & changeant, comme tous les sinus d'enhaut sont à autant de sinus totaux ou demi-diamètres, ainsi la ligne EF est à la circonférence CD.

Que si la ligne EF avoit été le demi-diamètre, & que

les sinus eussent été abaissés du quart de la circonférence, le demi-diamètre eût été au quart de la circonférence comme tous les sinus divisans la circonférence sont à autant de sinus totaux ou demi-diamètres.

*FIGURE COURBE
égale au Quarré.*

SUPPOSANT que le demi-diamètre du cercle est quart de cercle comme tous les petits sinus infinis à tous les sinus totaux, c'est-à-dire, autant de petits sinus à autant de sinus totaux : je trouve que le quarré du demi-diamètre est égal à la figure qui est faite par tous les sinus posés à angles droits sur la circonférence; car en la figure ABC, les lignes GH, IL, MN, PO, qui sont les



sinus de toute la circonférence BC, sont par l'extrémité de leur sommet la ligne AC; & continuant de faire & prolonger lesdits sinus en sorte qu'ils soient égaux au sinus total ou demi-diamètre, ils forment la figure ABCD. Je fais aussi sur AB son quarré ABEF.

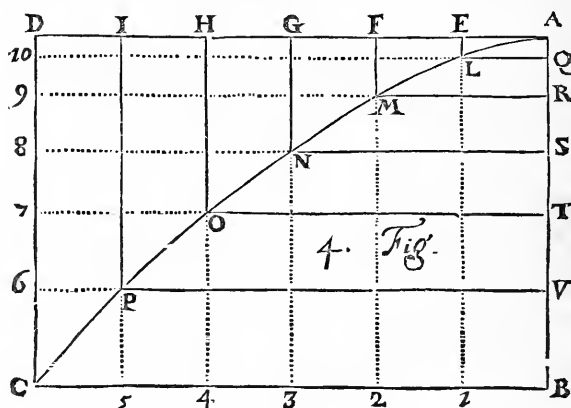
Puis

Puis je dis : Comme le demi-diamètre AB est à la circonférence BC, c'est-à-dire au quart de la circonférence, ainsi tous les sinus sont à autant de sinus totaux ou demi-diamètres ; & par les infinis, comme la figure ABC sera à la figure ABCD composée des infinis sinus totaux & du quart de la circonférence BC ; donc, comme le demi-diamètre est à la circonférence, ainsi la figure ABC est à la figure ABCD. Mais comme la ligne AB est à la ligne BC, ainsi le carré d'icelle est au rectangle fait de AB & BC ; donc la figure ABC est à la grande ABCD comme le carré ABEF est au rectangle ABCD ; ainsi le carré de AB a même raison au rectangle AC que la figure ABC ; & partant le carré de AB qui est ABFE est égale à la figure ABC, ce qu'on vouloit prouver.

DE LA PARABOLE.

SOIT la Parabole BALMNOPC, le sommet A, le diamètre AB, la ligne touchante AD, laquelle soit divisée en infinies parties égales AE, EF, FG, GH, HI, ID, & de tous les points soient tirées les lignes parallèles au diamètre AB jusques à la ligne CB, sçavoir E 1, F 2, G 3, &c. & des points où lesdites lignes coupent la Parabole, soient tirées les ordonnées LQ, MR, NS, OT, PV. Mais les lignes AQ, AR sont entr'elles comme le carré de la ligne LQ au carré de la ligne MR ; & la ligne AR est à AS comme le carré de MR au carré de NS, & ainsi de toutes les autres lignes. Or la ligne AD étant divisée en parties égales, & les parties dicelles étant égales aux lignes ordonnées, sçavoir AE à QL, AF à RM, AG à SN, AH à TO, & AI à VP, il s'ensuit que chaque carré d'icelles lignes surpassera le précédent selon la progression des nombres impairs, que les quarez seront faits des côtes differens

toûjours de l'unité, & que le côté du premier étant 1, les autres côtez seront 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les portions du diamètre comprises & coupées par les ordonnées font les mêmes que EL, FM, GN, HO, IP, DC; & par ainsi ces lignes sont entr'elles comme les quarréz 1, 4, 9, 16, 25, 36 font entr'eux. Je dis donc que toutes ces lignes prises ensemble seront à la ligne DC prise autant de fois qu'icelles lignes, comme la somme des quarréz (suivant l'ordre que j'ai dit, c'est-à-dire, à commen-



cer à l'unité, & suivre toûjours en augmentant de l'unité) est au quarré DC pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne AD, c'est-à-dire, en la présente division, six fois. Or multiplier un quarré autant de fois que vaut son côté, c'est-à-dire, par son côté, c'est faire un cube : il est donc vrai que la somme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC est à la ligne DC prise autant de fois qu'il y a desdites lignes, com-

mé la somme des quarez fufdits est au cube du plus grand nombre. Mais le cube est le triple de la somme des quarez, partant le triline CPONMLAD sera le tiers du rectangle CDAB, & par ainsi la Parabole ABCPONMLA fera les deux tiers du parallelogramme ou quarré CDAB; ce qui a été démontré par Archimède d'une autre maniere.

Que si nous voulons considerer une autre nature de Parabole comme M. Fermat, faisant que les portions du diamètre soient l'une à l'autre comme le cube au cube, il se trouvera que la même Parabole que dessus, ou plutôt le dehors d'icelle COAD, sera au rectangle ABCD comme la somme des cubes à un quarré-quarré, c'est-à-dire, comme 1 à 4. Si nous feignons que les portions du diamètre, c'est-à-dire, les petites lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC sont l'une à l'autre comme les quarré-quarrez entr'eux, il se trouvera que la somme de toutes ces lignes seront à la ligne CD prise autant de fois, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube, c'est-à-dire, comme 1 à 5, & par ainsi la Parabole vaudra 4 & le rectangle 5; & de cette sorte on pourra continuer & trouver des Paraboles qui changent de valeur, & cela se peut faire de toutes les puissances jusques où on voudra.

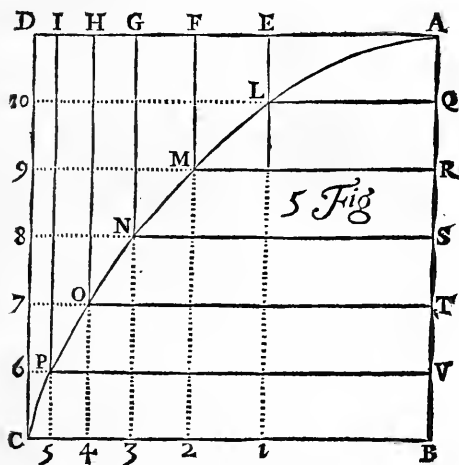
Quant au solide de notre Parabole, il se fait en feignant que tout le rectangle tourne sur son axe, & qu'il se fait un grand cylindre par la révolution de ABCD. La révolution de la première partie EAB₁ se peut nommer cylindre, mais celle de chacune des autres se nomme Rouleau, parce que nous les devons considérer chacune à part, & ceci est pour les grands cylindres; mais en considérant les petits, comme la révolution que fait EAQL, FARM, & tous les autres, nous rejettons ce qui est au dedans de la Parabole, & ne considérons que ce

qui est dehors; car toutes les parties de ces petits cylindres ou rouleaux qui sont dans la Parabole ne peuvent faire une partie aussi grande que fait le rouleau $DI \int C$; & par ainsi nous rejettons toutes ces parties qui n'en valent pas une, qui n'est de nulle considération dans les indivisibles.

Et par les petites lignes, c'est-à-dire par les portions du diamètre, nous considérons l'espace qui est hors la Parabole, & compris dans ces lignes. Tous ces cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme leurs cercles; mais les cercles sont entr'eux comme le quarré du demi-diamètre de l'un au quarré du demi-diamètre de l'autre: comme en notre figure le quarré de la ligne AE est au quarré de AF comme le premier quarré au second quarré, & le quarré de AF est à celui de AG comme le second quarré au troisiéme, &c. Mais un quarré surpasse son prochain de deux fois son côté, sçavoir le côté du moindre quarré, plus l'unité: il arrive donc que toutes les lignes, sçavoir AE, EF, FG, GH, HI, ID sont toutes différentes des quarréz, c'est-à-dire, chacune prise deux fois plus l'unité; or toutes ces unitez ne se considerent point dans les indivisibles comme chose finie. Nous prenons donc toutes ces lignes comme deux fois un côté chacune, puis après nous disons que les petites lignes EL, FM, GN , & les autres sont entr'elles comme des quarréz; nous les considerons comme des quarréz, & disons que l'espace ELQ vaut deux côtéz d'un quarré par son quarré EL , & le quarré de FM par le double de son côté FA fait l'espace FMR , & pareillement le quarré de GN par deux GA fait l'espace GNS , &c. Or un quarré par deux fois son côté vaut deux fois le cube; donc toutes ces petites lignes ensemble, ou l'espace qu'elles contiennent hors la parabole sont comme deux fois la somme des cubes au quarré de CD pris au-

tant de fois qu'il y a de divisions en la ligne DA, c'est-à-dire, au quarré de CD par le quarré du même CD, c'est-à-dire, au quarré-quarré.

Il faut maintenant considerer ABCD, ou la Parabo-
le CPOMAB se tournant sur son axe comme la préce-
dente, mais avec certe difference, que la ligne AB est
divisée en parties égales entr'elles. Nous considerons le
solide ou cylindre que fait DC qui a pour base le cercle
duquel le demi-diamètre est la ligne DA, les petits cy-



lindres ont pour demi-diamètre de leurs cercles les li-
gnes EA ou LQ son égale, MR, NS, OT, PV, &c. or
tous ces petits cylindres sont entr'eux comme leurs ba-
ses, c'est-à-dire, leurs cercles, & les cercles sont entre
eux comme les quarréz de leurs demi-diamètres : or les

quarrez de ces petites lignes sont entr'eux comme les lignes AQ, QR, RS, ST, TV, sçavoir en égale différence de l'unité, c'est-à-dire, que les quarrez de toutes ces lignes sont entr'eux comme l'ordre des nombres naturels. Ainsi le quarré de LQ étant 1, celui de MR vaudra 2, celui de NS 3, celui de OT vaudra 4, & celui de RV vaudra 5. Or les cylindres étant entr'eux comme les quarrez des demi-diamètres de leurs bases ou cercles, il s'ensuit que tous les quarrez de ces petites lignes sont au quarré de la grande BC pris autant de fois, comme la somme de la suite des nombres naturels, à commencer à l'unité, sont au quarré du dernier.

Mais le conoïde parabolique, c'est-à-dire, le solide fait par la révolution de CNLAB, est au cylindre total, sçavoir à celui qui est fait par la révolution de ABCD, comme toutes les petites lignes à la grande prise autant de fois; partant le conoïde parabolique est au cylindre, comme la somme des nombres, c'est-à-dire le triangle, est au quarré, ou bien comme la moitié à son tout; car la somme des nombres est au quarré (en terme d'indivisible) comme la moitié au tout; comme si la somme est 10 triangle de 4, le quarré est 16, dont la moitié 8 est excédée de 2 par ledit triangle. Or cela passe pour être la moitié de l'autre; car si on continuoit dans la suite des nombres on verroit que le triangle excéderoit toujours la moitié du quarré d'une moindre portion, laquelle partant s'anéantiroit enfin dans l'infini.

Maintenant il faut considérer la figure ABCD comme faisant son tour sur AD, lors la ligne CD sera le demi-diamètre de la base ou cercle du cylindre total; les lignes PI, OH, NG, MF, LE sont les demi-diamètres du cercle ou base de chacun de leurs cylindres. Or par la propriété de la Parabole, la ligne EL est à FM comme le quarré au quarré, & ainsi toutes les autres petites

lignes de suite ; partant le quarré de EL fera au quarré de FM comme un quarré-quarré à un quarré-quarré , & ainsi toutes les autres petites ; donc toutes ensemble elles seront entr'elles comme le quarré-quarré de DC pris autant de fois qu'il y a de petites lignes , c'est-à-dire , comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube ; & telle est la raison du solide fait par la révolution de CDA au cylindre total fait par la révolution de CB , c'est-à-dire , qu'ils sont entr'eux comme 1 à 5 .

Maintenant nous considerons que la figure tourne sur la ligne CD parallele à l'axe. Par cette révolution la ligne AD est le demi-diamètre de la base ou cercle du grand cylindre ; les lignes 10 L , 9 M , 8 N , 7 O , 6 P sont chacune le demi-diamètre du cercle ou base de leur cylindre qui sont l'une à l'autre comme leursdites bases ou cercles , & les cercles sont entr'eux comme les quarrez desdites lignes : donc tous les quarrez de ces petites lignes seront au quarré de la grande ligne prise autant de fois , comme les petits cylindres au grand cylindre. Mais je ne connois pas la raison des petits quarrez aux grands quarrez , laquelle je cherche par une grandeur qui leur soit égale , & je dis que le quarré de L 10 vaut le quarré de Q 10 & le quarré de Q L moins le rectangle de Q 10 Q L pris deux fois ; le quarré de M 9 vaut le quarré de R 9 , & celui de MR moins le rectangle de 9 R M pris deux fois , & ainsi des autres jusques à l'infini. Or faisant la comparaison , nous disons que les quarrez de Q 10 & Q L comparez au seul quarré Q 10 sont égalité de raison entre les deux grands qui sont égaux : le même soit entendu de tous les autres quarrez. Les grands étant égaux , il ne reste qu'à connoître la valeur des petits LQ , MR , &c. Mais nous avons vû ci-devant qu'ils sont au grand quarré comme la moitié au tout : si donc nous joignons un tout avec sa moitié , & le comparons

à un autre tout, nous ferons une raison de 3 à 2. Posons que le grand quarré vaille 2, l'autre qui est composé du grand & de sa moitié vaudra 3; partant la raison sera de ce dernier au premier de $\frac{3}{2}$ ou de 3 à 2; & poursuivant, on ôtera ce qui étoit de trop dans les deux quarrés mis ci-dessus pour trouver la valeur du quarré L 10, & nous avons dit que deux fois le rectangle Q 10 QL étoit de trop par-dessus le quarré L 10, & ainsi des autres; il faut donc ôter les rectangles deux fois à chaque quarré. Or tous ces rectangles ont pour même hauteur Q 10, donc ils seront entr'eux comme leurs bases ou petites lignes, & les solides entr'eux comme leurs bases. Mais nous avons vû que ce solide fait par le tour de la parabole étoit le tiers du cylindre total: or il faut ôter deux fois le rectangle, partant il faudra diminuer de deux tiers la raison que nous avons trouvée de 3 à 2, & mettant 9 à 6 au lieu de 3 à 2 & de $\frac{2}{3}$ on en ôtera $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$, & restera $\frac{2}{6}$ pour la valeur de CAB tourné sur DC, & le reste au cylindre entier, sçavoir CAD, vaudra $\frac{1}{3}$ du grand cylindre ABCD.

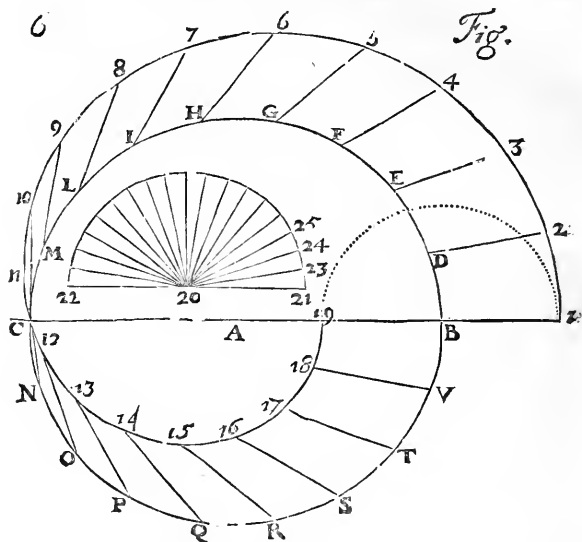
DE LA CONCHOÏDE.

LA Conchoïde se fait, quand d'un point on tire plusieurs lignes qui coupent une même ligne soit courbe ou droite, & que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne sont toutes égales, telles que sont B 1, D 2, E 3, F 4, G 5, &c. tirées par le moyen du cercle CGBR, divisé (selon la règle des indivisibles) en parties infinies égales, & par icelui a été composée la Conchoïde 19C 1, en laquelle, comme en toutes les autres, les lignes depuis la circonférence du cercle jusques à ladite Conchoïde sont toutes égales. Or toutes ces lignes qui divisent la circonférence du cercle commençant au point C & finissant

finissant en 1, 2, 3, 4, 5, &c. divisé tant la Conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent & deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré (quoique dans le fini il y ait quelque chose à dire;) ainsi le secteur C 1 2 est au secteur CBD ou CBV son égal, comme le quarré de C 1 au quarré de CB. En après, le secteur CBD ou CBV son égal est au secteur C 19 18 comme le quarré de CB au quarré de C 19. Mais pour joindre les deux quarez qui appartiennent à la Conchoïde afin de les comparer aux quarez du cercle, je regarde la valeur du quarré de C 1 qui vaut les quarez de CB, B 1, plus le rectangle deux fois sous CB B 1; le quarré C 19 est égal aux quarez de CB, B 19 ou B 1 son égal (car B 19 commence à la circonference du cercle, & va au point de la Conchoïde 19, & partant doit être égale à B 1 qui part de la même circonference, & va au point 1 de la Conchoïde) moins deux fois le rectangle CB B 19. Or le plus détruisant le moins, ces deux grandeurs jointes ensemble font le quarré CB deux fois, plus le quarré de B 1 deux fois; par ainsi le secteur C 1 2, & le secteur C 19 18 seront aux secteurs CBD, CBV, comme deux fois les quarez CB, B 1 à deux fois le quarré CB, & prenant la moitié, le quarré CB + le quarré B 1 sera au quarré CB comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV; & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarez CB, B 1 au quarré CB, ou bien comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV.

Je fais un demi cercle de l'intervale B 1, & je le divise en autant de triangles semblables qu'il y en a au cercle premier; & au lieu de compter le quarré B 1, je dis le quarré 20 21; donc comme le quarré CB + le quarré 20 21 sont au quarré CB; ainsi l'espace du cer-

cle & demi-cercle ensemble sont à l'espace du cercle. Mais nous avons montré que toute la Conchoïde est au cercle comme le quarré CB + le quarré BI ou leurs.

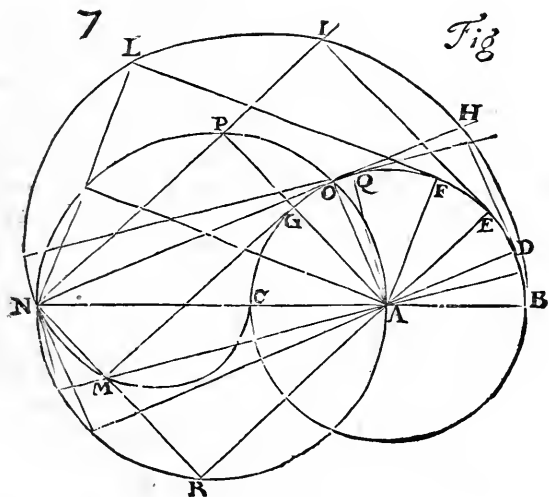


secteurs, est au quarré CB; par ainsi, toute la Conchoïde est au cercle en même raison que le cercle & demi-cercle est au même cercle; & partant la Conchoïde est égale au cercle & demi-cercle pris ensemble.

Conchoïde.

SOIT la base d'un cône oblique le cercle BFC duquel le centre est A; le sommet du cône est en l'air, avec telle obliquité, que de ce sommet la perpendicu-

faire tombe sur le point N. Nous supposons par les indivisibles, que par tous les points du cercle soient tirées des touchantes, comme DH, EI, FL, GM, &c. Nous disons que si du sommet du cône on tire une perpendiculaire sur chacune de ces touchantes, & que si du point N sur lequel tombe la perpendiculaire tirée du sommet, on tire une ligne à ce même point de la tou-



chante, l'angle sera droit, & ladite ligne perpendiculaire à ladite touchante; & la ligne qui passe par l'extrémité de chacune desdites touchantes & où se fait le susdit angle droit, sçavoir la ligne BHILNMC, se trouve être une Conchoïde.

Pour le prouver, il faut construire un cercle qui ait
 L ij

pour diametre NA, lequel cercle soit NPOAR, & faire voir que toutes les lignes comprises entre la circonférence APNR & la ligne BHILNMC, sont toutes égales entr'elles; nous prouvons que AOHD est un parallelogramme; car l'angle D est droit, puisque DH est touchante & AD demi-diametre; l'angle H est aussi droit pour avoir été tiré tel du point N sur lequel tomboit la perpendiculaire tirée du sommet du cône; l'angle O est droit pour être fait dans le demi-cercle NPOA, & partant le quatrième OAD le fera aussi; & partant c'est un parallelogramme, & les côtez opposez sont égaux; & par ainsi AD sera égale à OH comprise entre l'autre cercle & la ligne courbe, & AD est égale à AB pour être toutes deux le rayon d'un même cercle. Passons outre, & considerons PI EA. L'angle E est droit, étant fait par la touchante; l'angle I est droit, ayant été fait tel par la ligne NI; l'angle P est droit, comme étant fait dans le demi-cercle, & partant le quatrième l'est aussi, & les côtez opposez du parallelogramme, sçavoir PI & AE ou son égale OH, sont égaux; & partant AB, OH, PI sont égales, & ce sont les lignes comprises entre les deux circonférences, sçavoir entre le cercle NPAR, & la ligne courbe BHILNMC, & on prouvera le même de toutes les autres lignes; & partant cette ligne courbe est une Conchoïde.

DES ANNEAUX.

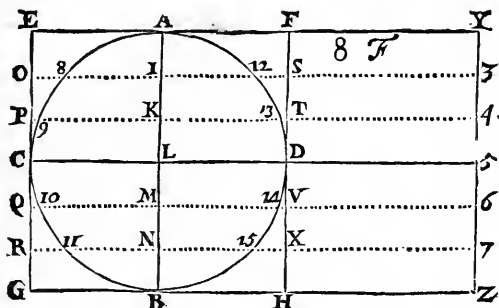
SI on décrit alentour d'une figure un parallelogramme (nous avons pris un cercle en cet exemple) & qu'on fasse tourner le tout sur un des côtez du parallelogramme, le solide fait par ce parallelogramme est au solide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme est au plan de la figure.

Nous expliquerons ceci par un cercle autour duquel est écrit le parallelogramme EFHG: au milieu du cercle on a tiré la ligne AB parallele au côté FH du parallelogramme; la nature de cette ligne doit être telle, que toutes les lignes tirées dans le cercle soient coupées en deux également par cette ligne. Supposant donc que le tout a tourné sur la ligne FH, dans ce tour le parallelogramme a fait pour solide un cylindre, & le cercle a fait pour solide un Anneau bouché qu'on nomme *Annulus strictus*, c'est-à-dire, qu'il se diminue peu à peu en sorte que rien n'y peut entrer. Or ces deux solides sont égaux entr'eux, excepté les vuides, qui étant remplis au grand solide sont de plus en icelui qu'au petit; il faut donc tirer lesdits vuide du grand pour sçavoir ce qu'il reste pour le petit, & tout se mesure par les quarez des lignes qui sont dans la figure. Je commence donc par la moitié du parallelogramme, & je considère que cette moitié fait un cylindre dans sa révolution, & que le demi-cercle fait une figure différente de ce cylindre, de ces petits espaces qu'il faut ôter du cylindre. Considérant les quarez du cylindre, je dis que le quarré de IS est égal aux quarez de S 12 & I 12 plus deux fois le rectangle de S 12 I 12; le quarré TK est égal aux deux quarez T 13, K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T; le même se doit entendre des autres quarez appartenant au cylindre AFHB. Mais si nous ôtons chaque quarré qui compose le vuide, & qui sont hors le cercle de chacun des quarez du solide, il nous restera tout le dedans du cercle, c'est-à-dire, du petit solide. Si donc du quarré SI on ôte le quarré S 12, il restera le quarré I 12 plus deux fois le rectangle S 12 I: ceci est tiré du premier quarré du cylindre. Quand je tire du second quarré du cylindre le quarré T 13, il me reste le quarré K 13 plus deux fois le rectangle

K 13 T, & ainsi des autres. Puis donc que j'ai de reste le quarré 12 I plus deux fois le rectangle, S 12 I je joins le quarré avec une fois le rectangle, & par-là j'ai le rectangle SI 12, & le rectangle S 12 I. Je retiens ces restes; & passant à l'autre moitié du cercle pour la joindre avec lesdits restes, je considere ce qu'elle fait quand le tout rourne sur la même ligne qu'auparavant, & ce que font les grands quarez S 8, T 9 & les autres. Je regarde combien ils surpassent les petits quarez I 8, K 9, & les autres qui font dans le demi-cercle, & je dis ainsi: Le quarré S 8 est égal aux deux quarez SI, I 8 plus deux fois le rectangle SI 8; le quarré T 9 est égal aux quarez TK, K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres. Or il faut ôter de tous ces quarez les quarez du cylindre, sçavoir de SI, TK, & autres, & nous aurons de reste le quarré de I 8 plus deux fois le rectangle SI 8, le quarré de K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres, & ceci se doit joindre à l'autre espace du demi-cercle.

Pour faire cette jonction, je prens le quarré de 8 I que je joins au rectangle S 12 I que j'avois de reste à l'autre demi-cercle, & je fais le rectangle SI 12 que j'avois déjà une fois, & partant je l'ai deux fois. Au second demi-cercle, les quarez 8 I, 9 K étant ôtez il m'est resté deux fois le rectangle SI 8 qui est le même que le précédent, & par ainsi j'aurai quatre fois le rectangle SI 8; donc quatre fois ce rectangle fera au quarré de SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total; & au lieu de dire quatre fois le rectangle, je double les lignes ou côtez du rectangle, & je dis que le rectangle tout seul SO par 8 12 est au quarré SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total. Mais tous ces rectangles pris à l'infini sont tous d'égale hauteur entr'eux & avec le parallelogramme total; ils feront donc entre-

eux comme leurs bases ou lignes, c'est-à-dire, comme l'espace de ces lignes comprises dans le cercle est à l'espace des grandes lignes qui composent le parallelogramme : donc comme le solide au cylindre, ainsi le plan du solide est au parallelogramme; ce qu'il falloit prouver.

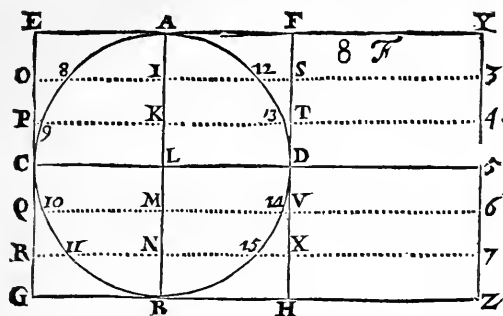


Nous trouverons la même chose en faisant tourner toute la figure sur la ligne YZ. Il faut premierement examiner ce que fait ABZY par sa révolution, & ce qu'il differe d'avec ABHF. Le quarré ZB vaut les quarez de ZH & HB plus deux fois le rectangle ZHB; le quarré 7N est égal aux quarez 7X, XN plus deux fois le rectangle 7XN, & ainsi de chacun des autres grands quarez. Il en faut ôter tous les quarez qui composent l'espace HY, sçavoir le quarré FY, S₃, T₄, & les autres, lesquels étant ôtez, resteront le quarré SI plus deux fois le rectangle 3SI, & le quarré de TK plus deux fois le rectangle 4TK; prenant le quarré SI, & le joignant à l'un des rectangles, je ferai le rectangle 3IS, & le rectangle 3SI; puis à 4T, si on joint le quarré de KT à l'un des rectangles, on fera le rectangle 4KT, & le rectangle 4TK. Il faut retenir tout ceci, & passer

à la considération du solide qui se fait par la révolution de AB GE tournant sur même YZ. Nous disons que le quarré de 3 O est égal aux deux quarrez de 3 I & IO plus deux fois le rectangle 3 IO ; que le quarré 4 P vaut les quarrez de 4 K ; KP plus deux fois le rectangle 4 KP , & ainsi des autres. De la valeur de ces quarrez il en faut ôter tous les quarrez qui remplissent l'espace ABZY , sçavoir les quarrez 3 I , 4 K , 5 L , & les autres ; & partant il reste le quarré OI plus deux fois le rectangle 3 IO ; & ajoutant au rectangle 3 SI qui étoit resté au calcul de l'autre cylindre le quarré OI , je ferai le rectangle 3 IO ; & par ainsi dans le précédent cylindre j'aurai deux fois le rectangle 3 IS ; & dans ce dernier , le quarré OI étant ôté , il reste deux fois le rectangle 3 IO qui est le même que 3 IS ; partant le tout ensemble fera quatre fois le rectangle 3 IO ; partant le quadruple du rectangle 3 IO sera au quarré de EY , comme le cylindre , ou plutôt le rouleau GEFH est au cylindre total EGZY.

Il faut maintenant considerer ce que fait le cercle par sa révolution , tournant sur la même ligne YZ , & le comparant au cylindre total ; ce qui se doit faire en considérant une portion , sçavoir la moitié de la figure A 12 B 9 A. Nous prendrons donc premicrement la moitié A 12 15 B' , & dirons : Le quarré de 3 I vaut les quarrez 3 12 , & 12 I plus deux fois le rectangle 3 12 I ; le quarré de 4 K vaut les quarrez 4 13 , & 13 K plus deux fois le rectangle 4 13 K , & ainsi des autres. De cette équation il faut ôter les quarrez 3 12 , 4 13 , & tous les autres qui sont hors le cercle. Au rectangle 3 12 I j'ajoute le quarré I 12 , & je fais le rectangle 3 I 12 , & le rectangle 3 12 I. J'ajoute pareillement le quarré K 13 au rectangle 4 13 K , & je fais le rectangle 4 K 13 , & le rectangle 4 13 K ; ce qu'il faut retenir afin de l'ajouter

à l'autre moitié que je cherche maintenant, & je dis que le quarré de 3 8 vaut les quarez de 3 I & I 8 plus deux fois le rectangle 3 I 8; le quarré 4 9 vaut les quarez 4 K & K 9 plus deux fois le rectangle 4 K 9. Or il faut ajouter tout ceci à la quantité que j'avois trouvée dans l'autre moitié du cercle, laquelle est le rectangle 3 I 12 & 3 12 I; & ajoutant au rectangle 3 I 8 le quarré 8 I, je fais le rectangle 3 I 8, tellement que j'ai le rectangle 3 I 12 deux fois, & j'ai trouvé en la discussion de la seconde



moitié (les vuides étant ôtez, c'est-à-dire, les quarez de I 3, K 4 &c.) le quarré 8 I (que j'ai ajouté au rectangle que j'avois trouvé auparavant) plus deux fois le rectangle 3 I 8 qui est le même que 3 I 12; tellement que j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8, qui est au quarré de EY comme l'anneau ou solide fait par le cercle roulant sur YZ, au cylindre total. Le rectangle 4 K 13 pris quatre fois est au même quarré EY comme le solide du cercle est au cylindre total fait par EGZY.

Il faut considerer le rapport que nous avons trouvé du rouleau par le tour du parallelogramme EGHF au grand cylindre. La proportion est comme quatre fois le rectangle 3 I O au grand quarré EY, ainsi le rouleau

EGHF au cylindre total. Pour conclure, nous disons que quatre fois le rectangle 3 IO trouvé dans le rouleau GF, est au grand carré EY, comme le même rouleau GF au grand cylindre GY. Ensuite j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8 qui est au grand carré EY, comme le solide fait par le cercle A 8 B 12 au cylindre total. Il se trouve que le grand carré est consequent en l'une & en l'autre des comparaisons ; partant les solides seront entr'eux comme les rectangles entr'eux ; mais les rectangles sont tous d'égale hauteur ; rejetant la hauteur ils seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les lignes du cercle aux lignes du rouleau : or ces lignes, en cas d'indivisibles, comprennent l'espace de chaque figure ; donc comme le solide ou anneau est au rouleau GF, ainsi le plan A 8 B 12 est au plan GF ; ce qu'il falloit démontrer.

Par tout ce discours nous n'avons trouvé que des raisons entre les solides & entre les plans : maintenant nous considerons si les solides sont égaux ou non. Je parlerai premierement du cylindre que fait le parallelogramme EFHG quand il roule sur la ligne FH : sa base est un cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH ; sa hauteur est la ligne HF : au lieu du cercle je prens ce qui lui est égal, sçavoir le parallelogramme qui a le demi-diametre pour un côté, & la moitié de la circonference pour l'autre ; & par ainsi j'ai trois côtez ou lignes, qui me doivent servir pour les comparer avec le solide que je pretens être égal à ce cylindre. Le solide donc a pour base le parallelogramme EFHG, pour hauteur la circonference d'un cercle duquel le demi-diametre est LD. Or les solides, selon Euclide, sont entr'eux en la raison composée de leur base & de leur hauteur ; il faut donc considerer ce qu'ils ont de commun. Je trouve que dans le cylindre il y a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la

demi-circonférence du cercle qui a pour demi-diamètre la ligne GH : dans l'autre solide j'ai les lignes GH, HF, & la circonférence du cercle qui a pour demi-diamètre la ligne LD. Mais dans l'une & dans l'autre j'ai deux lignes communes, ſçavoir GH & HF, entre leſquelles il ne peut avoir autre raiſon que d'égalité, puisſqu'elles ſont égales, & partant on les peut ôter, & la compoſition des raiſons demeurera entre la circonférence d'un cercle & la demi-circonférence de l'autre. Mais les circonférences ſont entr'elles comme leurs diamètres : or le diamètre total du cercle entier qui eſt DC eſt égal au demi-diamètre GH; partant la circonférence entière appartenant à DC ſera égale à la demi-circonférence appartenant au demi-diamètre GH; & par ainſi le cylindre ſera égal au ſolide; ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut conſiderer toute la figure, lorſque le parallelogramme EYZG ſe tournant ſur la ligne YZ fait le grand cylindre. Je diſ que le rouleau GF eſt égal au ſolide qui a pour baſe le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui aura pour demi-diamètre la ligne L ſ. Je diſ encore que l'anneau (c'eſt-à-dire le ſolide qui ſe fait par la révolution du cercle quand le tout roule ſur YZ) eſt égal au ſolide qui a pour baſe le cercle ACBD, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui a pour demi-diamètre la ligne L ſ.

Pour prouver cette égalité il faut faire voir que les quatre ſolides ſuivans ſont proportionnaux, ſçavoir le rouleau qui ſe fait quand le parallelogramme EFHG roule ſur la ligne YZ. Le ſecond eſt l'anneau qui ſe fait par le cercle quand le grand parallelogramme GY tourne ſur la ligne YZ. Le troiſième eſt celui qui a pour baſe le parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamètre eſt la ligne ZB.

Et le quatrième est celui qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamètre est la ligne L 5, & par ainsi, faisant voir comme le premier desdits solides est égal au troisième, le second par conséquent doit être égal au quatrième. Or nous avons montré que comme quatre fois le rectangle ZBH est au carré de GZ, ainsi le rouleau GF est au grand cylindre GY. Maintenant il nous faut examiner comment la figure qui a pour base le parallélogramme EF HG, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamètre est la ligne L 5, est égale au même grand cylindre GY.

Nous sçavons que les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur : je considère quelles sont les parties de l'un & de l'autre des solides, & je trouve que le grand cylindre a deux parties, sçavoir la ligne GZ qui est le demi-diamètre de sa base qui est un cercle, l'autre ligne est HF. Mais d'autant que nous avons besoin de trois côtes en ce solide ou grand cylindre, pour le comparer au solide qui a pour base le parallélogramme GF, & pour hauteur la circonférence du cercle duquel la ligne L 5 est demi-diamètre, lequel solide a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la circonférence du cercle qui a L 5 pour demi-diamètre. Pour avoir trois côtes au grand cylindre, au lieu de prendre son demi-diamètre qui représente son cercle, je prens ce qui est égal au cercle, sçavoir le demi-diamètre GZ, & la demi-circonférence du même cercle (le rectangle fait de ces lignes est égal au cercle selon Archimède.)

J'aurai donc trois côtes ou lignes au grand cylindre, sçavoir GZ, HF, & la demi-circonférence du cercle dont GZ est le demi-diamètre. Il y a donc dans ces deux solides deux côtes qui sont semblables, sçavoir HF en chacun d'eux; & partant ils ne servent de rien pour la

Composition des raisons qui demeurera entre les lignes GH, GZ antécédent & conséquent, & la circonférence entiere du cercle qui a L ζ pour demi-diametre, à la demi-circonférence du cercle qui a GZ pour demi-diametre. Mais d'autant que les circonférences sont entr'elles comme leurs diametres, au lieu des circonférences je prens le diametre entier qui est deux fois L ζ , & pour la demi-circonférence je pose son demi-diametre GZ; partant la raison sera composée des raisons de la ligne CH à GZ, & de la ligne L ζ doublée à la ligne GZ.

Or si on multiplie les antécédens l'un par l'autre, & pareillement les conséquens, on aura ladite raison composée; donc GZ par GZ, c'est-à-dire le quarré de GZ est au rectangle de GH par le double de L ζ ou ZB en ladite raison composée; partant les solides seront entr'eux comme le rectangle de ZB deux fois par GH au quarré de GZ. Au lieu de ZB deux fois par GH, on prendra GH deux fois par ZB: or ZB par GH deux fois, est quatre fois le rectangle ZBG; partant le solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonférence du cercle qui a L ζ pour demi-diametre est au cylindre total, comme quatre fois le rectangle ZBG est au quarré GZ; donc le rouleau & le solide auront même raison au cylindre total; & par ainsi le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ est égal au solide qui a pour base le même parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonférence du cercle qui a pour demi-diametre la ligne ZB.

Puisque ces deux solides sont égaux, qui sont le premier & le troisième dans les quatre proportionnaux, les deux autres qui sont le second & le quatrième seront aussi égaux entr'eux. Ces deux solides sont l'anneau qui se fait par le cercle, quand le grand parallelogramme tour-

rectangles, afin de laisser les grands quarrez. Je prendrai le rectangle BLA qui vaut le carré de LD ou MV, sçavoir les grands quarrez; & pour faire la comparaison, je dis que le rectangle BIA avec le carré de LI est égal au carré de LA ou LD son égal, ou quelque'autre des grands quarrez; le rectangle BKA plus le carré de LK est égal au même grand carré LD, & ainsi de tous les petits rectangles qui se pourront faire; partant les grands quarrez excéderont les petits rectangles de tous les petits quarrez LI, LK qui vont toujours en diminuant, & par ainsi font une pyramide que nous sçavons être la troisième partie de son parallépipède ou cube. Si donc nous ôtons le tiers, il restera les deux tiers pour la valeur de la sphère ou sphéroïde, qui seront par cette raison les deux tiers de leur cylindre; ce qu'il falloit prouver.

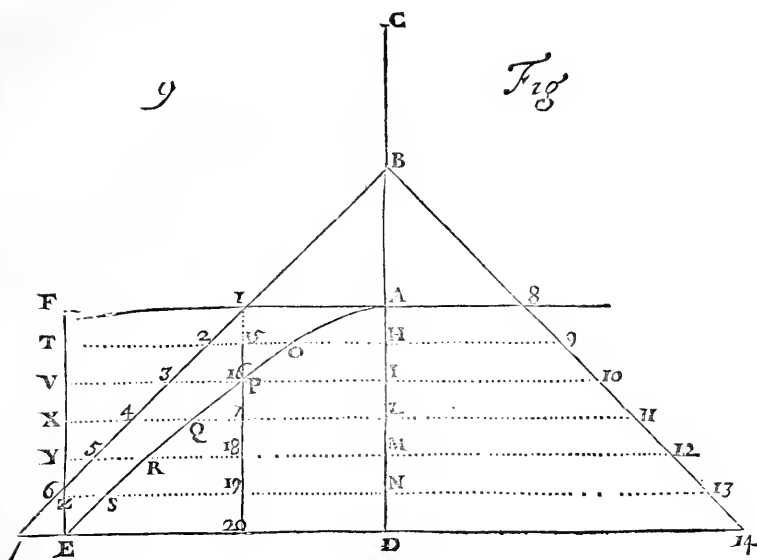
DE L'HYPERBOLE.

DANS l'Hyperbole AEDBC le sommet est C, c'est-à-dire que du point C on commenceroit l'hyperbole opposée; AC est le diamètre transversal coupé en deux au point B qui s'appelle le centre de l'hyperbole. Il faut voir quand l'hyperbole tourne sur la ligne AD, qui est l'axe, quelle raison le solide ou conoïde hyperbolique qui se fait, peut avoir avec son cylindre, c'est-à-dire, le solide qui se fait quand le parallélogramme FD tourne aussi sur l'axe AD.

Nous sçavons que le conoïde est au cylindre, comme tous les quarrez ensemble compris dans l'espace AED, sçavoir le carré de HO, de IP, LQ, & les autres, sont au carré de ED pris autant de fois qu'il y en a de petits. Il reste à chercher la raison des quarrez entr'eux avec le grand.

La propriété de l'hyperbole est que le quarré HO est au quarré IP , comme le rectangle CHA est au rectangle CIA ; le quarré IP est au quarré LQ , comme le rectangle CIA au rectangle CLA , & ainsi des autres; & par ainsi tous les petits rectangles sont au grand rectangle CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme tous les petits quarrés sont au grand quarré pris autant de fois qu'il y en a de petits. Mais pour sçavoir quelle est cette raison, je change les petits rectangles en leurs égaux, & au lieu du rectangle CHA je pose le rectangle CAH plus le quarré HA ; au lieu du rectangle CIA , je pose le rectangle CAI plus le quarré IA , & ainsi des autres; pour le grand, il n'y faut rien changer. On fera ensuite la comparaison, premierement des rectangles CAH , CAI , & des autres petits entr'eux & au grand CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits; & nous trouvons que tous les petits rectangles sont de même hauteur, sçavoir CA , & par ainsi, ils seront entr'eux comme leurs bases. Nous avons donc pour les petits rectangles un solide qui a pour hauteur la ligne CA , & pour base tous les nombres naturels qui composent un triangle. Si au lieu de la ligne CA je prens sa moitié AB , j'aurai un solide qui aura pour base le quarré de AD , & pour hauteur la ligne BC ; ceci est pour les petits rectangles. Pour le grand rectangle, son solide a pour hauteur DC , & pour base DA pris autant de fois qu'il y a de petits rectangles, c'est-à-dire le quarré DA ; partant les deux solides ont tous deux le même quarré DA pour base; & partant nous n'avons à considerer que leur hauteur DC pour le grand, & BC pour le petit; partant tous les petits rectangles sont au grand rectangle pris autant de fois, comme DC est à BC .

Il reste maintenant à considerer comment tous les petits quarrés sont au même grand rectangle. Or tous
les



petits quarez , ſçavoir ceux de AH , AI , AL , AM , AN ,
 font une pyramide qui a pour baſe le quarré de AD ,
 & pour hauteur la même AD. (car les quarez dimi-
 nuez à l'infini font une pyramide) Mais la pyramide
 eſt le tiers de ſon parallelipede ; c'eſt-à-dire du ſolide
 qui a pour baſe le même quarré que la pyramide , & qui
 ſe hauſſe autant que la pyramide , ſçavoir de la ligne
 DA ; donc au lieu de la hauteur DA , j'en prens le tiers ,
 & j'ai le ſolide qui a pour baſe le quarré DA , & pour
 hauteur le tiers de DA ; joignant donc ce tiers de DA

Rec. de l'Acad. Tom. VI.

N n

avec BC que j'avois trouvé devant, j'ai le tiers de DA plus BC ou AB son égale, à la toute DC.

Pour le faire plus élégamment, je dirai : Comme le tiers de AG (car j'ai ajouté à AC la ligne CG égale à BC) avec le tiers de DA qui est comme le tiers de DG à la ligne DC ; ainsi le conoïde hyperbolique ou petit solide est au cylindre fait par AFED. Que si nous voulons avoir la raison du cône qui se feroit , si le triangle AED se tournoit sur la ligne DA (pour avoir ce triangle il faut tirer la ligne droite AE.) Euclide dit que le cône est le tiers de son cylindre : prenant donc le tiers de la ligne DC, elle sera au tiers de la ligne DG, ou toute la ligne DC à toute la ligne DG, comme le cône au conoïde hyperbolique ; ce qu'il falloit montrer.

Autre spéculation sur l'Hyperbole.

DU centre de l'Hyperbole B j'ai tiré les asymptotes B7, B14. Si par le point A je tire la touchante 8 A1, & que je tire d'un asymptote à l'autre infinies parallèles, comme les lignes 9 H2, 10 I3, & les autres, le rectangle 8 A1 est égal au rectangle 9 O2, 10 P3 ; & ainsi tous ces rectangles sont égaux entr'eux. Quand le triangle B7D tourne sur DA, il se fait un cône qui est égal à tous les quarrés qui sont dans le plan, sçavoir au quarré de A1, H2, I3, & à tous les autres, & dans le plan 1 B A. Si donc de tous ces quarrés j'en ôte premièrement le vuide 1 B A, & tout ce qui est au dehors du plan EDA, il me restera le conoïde hyperbolique qui se fait par EDA tournant sur DA. Or le quarré H2 vaut le rectangle 9 O2 plus le quarré de HO ; le quarré I3 vaut le rectangle 10 P3 plus le quarré de IP ; le quarré de L4 vaut le rectangle 11 Q4 plus le quarré de LQ, & ainsi des autres. Mais chacun des re-

triangles est égal au carré de AI , lequel pris autant de fois qu'il y a de rectangles, fera le cylindre $120 DA$; partant étant ce cylindre, il restera les quarez de HO , IP , LQ , qui sont égaux au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

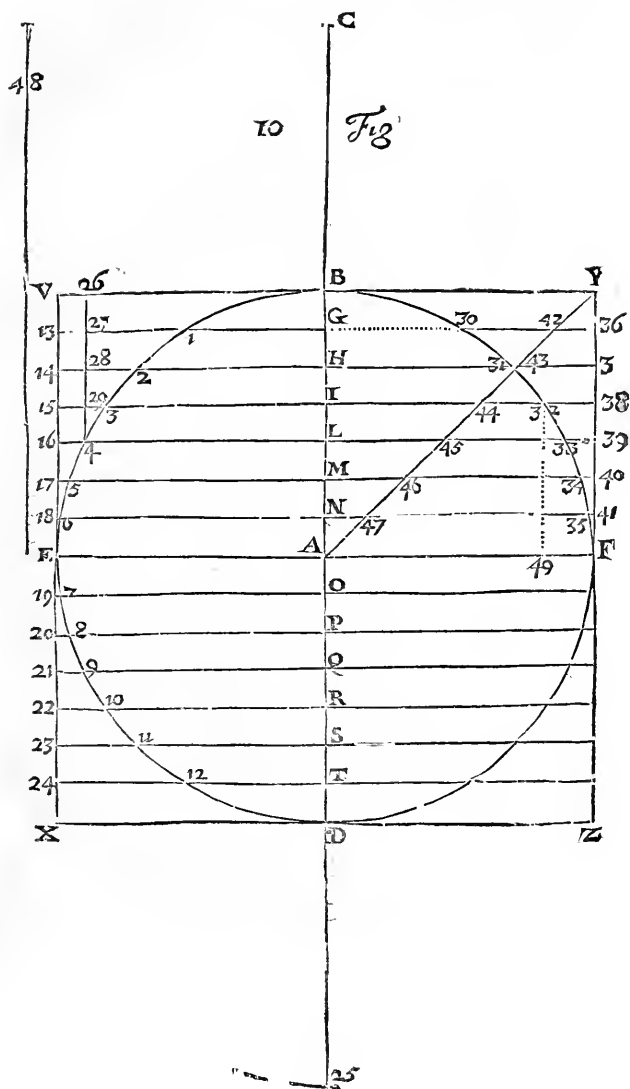
PROPORTION DE LA SPHERE
ou Sphéroïde, ou de leurs portions, au Cylindre circonscrit, & au Cône inscrit.

ON considerera ici ce que fait la figure qui est en la page suivante tournant sur BD , & ne prenant que la portion $26 BL4$ que fait le cylindre & la portion de la Sphère ou Sphéroïde qui se fait par la révolution de la figure $41 BL$. Le carré de $G1$ & les autres petits sont au grand carré $4L$ pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme la portion de la sphère ou sphéroïde (car c'est la même raison en l'une & en l'autre) est au cylindre $26 BL4$. Il est donc question de chercher la raison de ces petits quarez au grand carré. Or tous les petits quarez sont au grand, comme les rectangles DLB , DIB , DHB , DGB sont au grand rectangle DLB ; partant tous lesdits petits rectangles sont au grand rectangle DLB pris autant de fois, comme tous les petits quarez sont au grand carré pris autant de fois. Pour trouver la raison des petits rectangles au grand rectangle pris autant de fois, je change la valeur des petits rectangles en d'autres qui vailent autant, & je dis ainsi : Le rectangle DBL moins le carré BL vaut le rectangle DLB ; le rectangle DBG moins le carré BG vaut le rectangle DGB ; le rectangle DBH moins le carré BH vaut le rectangle DHB ; le rectangle DBI moins le carré BI vaut le rectangle DIB ; partant dans les petits rectangles je trouve un solide qui a pour hauteur

N n ij

DB, & pour bafe les petites lignes LB, LG, LH, LI qui font la fomme de nombres naturels qui eft un triangle lequel eft toujours la moitié de fon quarré; partant je double le triangle pour avoir le quarré; & par ainfi j'aurai un folide qui aura pour hauteur DA moitié de DB (car doublant le triangle j'ai ôté la moitié de DB) & pour bafe le quarré de LB comme l'autre folide. Pour le grand rectangle, ſçavoir DLB pris autant de fois, il compoſe un folide qui a pour hauteur la ligne DL, & pour bafe le même quarré LB. Les baſes étant égales, il n'y a que les hauteurs à confidérer, ſçavoir DB & BL. Mais il faut ôter des petits rectangles les quarez qui étoient de moins: or ces petits quarez compoſent une pyramide qui a pour bafe le quarré de LB, & pour hauteur LB. Au lieu de la pyramide je prens un parallepipede qui lui ſoit égal: je retiens le même quarré LB, & pour hauteur le tiers de LB, qui eft la hauteur du parallepipede égal à la pyramide (car toute pyramide eft le tiers de fon parallepipede.) Il faut ôter ce folide de l'autre qui a même bafe, & partant il ſuffit d'ôter la hauteur du dernier de la hauteur de l'autre. Voilà touchant le folide fait par les petits rectangles. Il reſte maintenant à chercher le folide du grand rectangle. Or ce folide n'eſt autre que celui qui a le quarré LB pour bafe, & DL pour hauteur. Celui-ci n'a point d'autre bafe que les autres, partant nous ne regarderons que la hauteur DL en celui-ci, puis nous dirons que comme le tiers de la ligne 25 L (car DA moins le tiers de LB vaut le tiers de la ligne 25 L) eſt à la ligne DL, ainſi le folide fait par la figure 42 BL eſt à ſon cylindre fait par le parallelogramme 264 LB.

Que ſi nous voulons avoir le cône qui ſe feroit par la même révolution, ſi on tiroit une ligne B4. Nous ſçavons que le cône eſt le tiers de ſon cylindre; je pren-



drai donc le tiers de DL (laquelle représente le cylindre) & je dirai que comme le tiers de la ligne 25 L est au tiers de la ligne DL, ainsi notre solide est au cône : or qui dit le tiers d'une ligne au tiers d'une autre, dit la ligne entière à la ligne entière; partant le solide sera au cône, comme la ligne 25 L est à la ligne DL; ce qu'il falloit trouver. Dans la même figure il faut considérer que, lorsqu'elle tourne sur la ligne AB quand le cylindre VEFY se fait, il se fait aussi un solide par la révolution du plan ABF, qui s'appelle un creux. Il se fait encore un autre solide par le plan B 30 FY. Nous en avons encore un autre qui se fait sur le triangle AYB qui est un cône. Il faut voir quel rapport ont entr'eux tous lesdits solides.

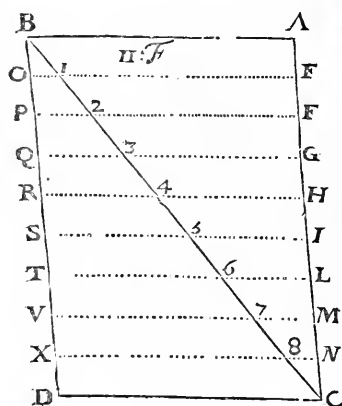
Les divisions étant faites à l'infini, & toutes les lignes tirées telles qu'on les voit en la figure, les figures sont entr'elles comme les quarrés de ces lignes sont entr'eux. Or pour ce qui est du cône que nous voulons égalier au solide fait par B 30 FY, il faut dire que la grande ligne du cylindre total est coupée en deux également au point I, sçavoir la ligne 15 I 38, & en deux parties inégales au point 32; partant le rectangle 15 32 38 avec le quarré I 32, vaut le quarré I 38. Si donc du quarré I 38 j'ôte le quarré I 32, il me reste le rectangle 15 32 38 qui appartient au solide B 30 FY.

Puis après nous entrons dans les propriétés de l'ellipse; (car ce que je conclurai s'entendra du cercle comme de l'ellipse.) Le diamètre EF, le diamètre BD & le côté droit du diamètre EF, sçavoir la ligne 48, sont trois proportionnelles; & la première EF est à la troisième 48, comme le quarré de la première EF est au quarré de la seconde DB. De plus, le rectangle E 49 F est au quarré de l'ordonnée 49 32 comme la ligne EF est à la ligne 48 côté droit d'icelle; partant le rectangle E 49 F est au

quarré 49 32, comme le quarré EF est au quarré DB, ou le quarré de AF au quarré de AB. Au lieu de AF je pose son égale BY; donc le quarré BY est au quarré BA, comme le rectangle E 49 F au quarré 49 32; ou bien prenant leurs égaux, le rectangle 15 32 38 au quarré IA égal au quarré 49 32. Mais le quarré BY est au quarré BA, comme le quarré I 44 est au quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera au quarré IA, comme le quarré I 44 est au même quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera égal au quarré I 44; & par ainsi le cône sera égal au solide de B 30 FY. Mais le cône est le tiers de son cylindre; si donc j'ôte le tiers du cylindre total, il restera les deux tiers pour le solide ou le creux qui se fait par le plan AFB, qui est ce qu'on cherchoit.

Or, non-seulement le cône est égal au solide extérieur, mais chaque partie est égale à chaque partie; c'est-à-dire que le solide fait par N 47 46 M, est égal au solide fait par 35 41 40 34; le solide 45 LM 46 est égal au solide 33 39 40 34, & ainsi des autres. Par tout ceci nous venons à la connoissance du centre de gravité de tous ces solides; car le centre de gravité du cylindre AY est au milieu de la ligne AB: or le centre de gravité du cône est aux $\frac{3}{4}$ de la ligne AB; le centre de gravité du solide qui lui est égal, se trouve au même lieu dans la ligne BA aux $\frac{3}{4}$ d'icelle; partant, selon Archimède, le centre de gravité de la sphère ou sphéroïde restant du cylindre sera connu, parce qu'il est en la raison réciproque des deux solides, sçavoir de la sphère ou sphéroïde, au solide de dehors, c'est-à-dire à B 30 FY, aux lignes qui sont depuis le centre de gravité du grand cylindre, au centre de gravité du petit solide, & à la ligne qui part du centre de gravité du même grand cylindre au centre de gravité de la figure restante que je cherche, qui est de la sphère ou sphéroïde.

PROPORTION DU COSNE
au Cylindre.



EN cette figure le triangle est au parallélogramme, comme tous les nombres naturels sont au carré du plus grand; c'est-à-dire, comme 1 à 2. Que si vous le faites tourner sur la ligne BD, le cône qui se fera de BDC sera au cylindre qui se fera sur ABDC comme 1 à 3 selon Archimède.

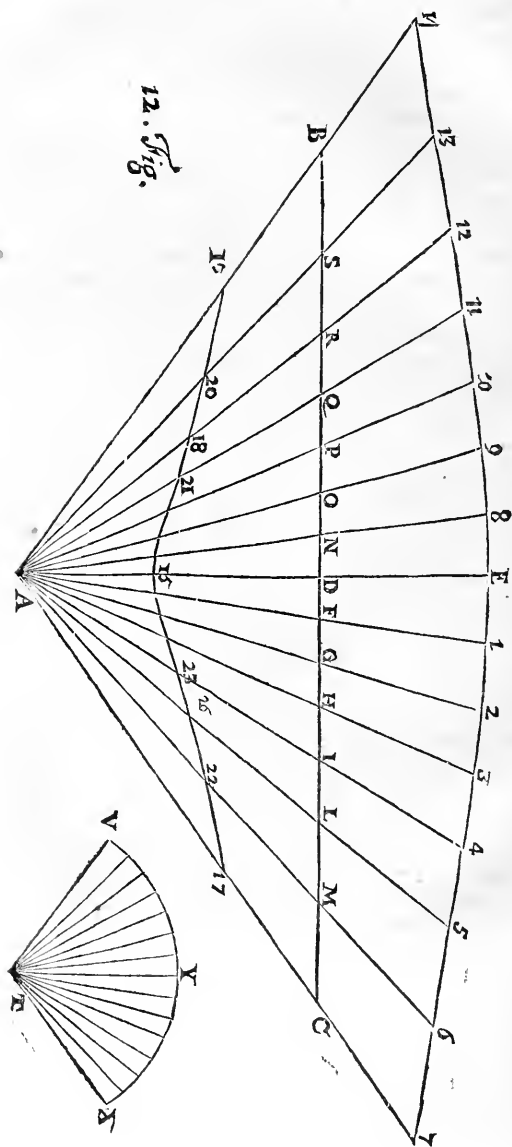
DE LA CONCHOÏDE.

NOUS considérons premièrement le grand triligne A 7 14. Le centre de la conchoïde est A; la conchoïde 14 7 est la première, & la seconde conchoïde est 16 17; la règle qui les sépare BC; les lignes qui partent de cette règle ou ligne & qui vont aux deux conchoïdes, sçavoir C 7, M 6, L 5, & les autres, sont toutes égales entr'elles, & pareillement les lignes C 17, M 22, L 19 sont égales entr'elles & aux autres ci-dessus, sçavoir à C 7, M 6, &c. Nous disons donc ainsi:

Le grand triligne est divisé (selon les indivisibles) en secteurs semblables infinis qui ressemblent aux triangles, mais

mais par les indivisibles nous les prenons pour secteurs : or les secteurs semblables sont entr'eux comme leurs quarez ; nous devons donc chercher la raison & la valeur des quarez pour tirer nos conséquences. Au lieu de chaque quarré nous considérons son égal ; & par ainsi nous trouvons que le quarré A 7 vaut les quarez AC, C 7 plus deux fois le rectangle AC 7 ; le quarré A 17 vaut les quarez AC, C 7 ou C 17 moins le rectangle AC 17 pris deux fois. Tout ceci mis ensemble vaut le quarré C 7 deux fois, plus le quarré AC deux fois, les rectangles qui sont par plus & moins se détruisant l'un l'autre ; or ces quarez nous représentent les deux trilignes, sçavoir A 7 14, & A 17 16.

Je dis que le grand triligne A 7 14, & le petit A 17 16 sont égaux à deux fois les quarez AC, & C 7. [La petite figure qui est ici a été faite, d'autant que dans l'espace C 7 B 14 il n'y a point de secteurs qui remplissent ledit espace, mais seulement des quarez qui sont entr'eux comme les secteurs. Je prens donc des secteurs tous semblables, dont les angles soient égaux aux angles en A, & la hauteur égale aux lignes C 7, M 6, & autres : ces secteurs sont au grands secteurs ; comme les quarez de C 7, M 6, L 5, & autres, sont aux grands quarez A 7, A 6, A 5, & autres.] Ayant donc l'égalité susdite entre les trilignes A 7 14 & A 17 16, & les quarez AC & C 7 pris deux fois : au lieu des quarez C 7 je prens des secteurs semblables, qui garderont la même raison entr'eux que lesdits quarez ; partant au lieu de dire, deux fois les quarez C 7, M 6, & les autres, je prens deux fois les secteurs compris dans la petite figure T V Y X, & je dis, deux fois les petits secteurs avec deux fois le triangle ACB sont égaux au triligne A 7 14, & au triligne A 17 16 ; & c'est ici la première conséquence ou conclusion.



12. fig.

Pour la seconde, c'est quand nous ôtons du grand triligne A 7 14 le petit triligne A 17 16, alors nous avons d'un côté l'espace 16 17 7 14 pour comparer avec deux fois les petits secteurs, le triangle ABC, & l'espace 16 17 CB. Alors l'espace d'une conchoïde à l'autre, c'est-à-dire 16 17 7 14, est égal à deux fois les petits secteurs plus deux fois l'espace 16 17 CB; & c'est ici une autre conclusion.

J'avois omis de dire que quand du grand triligne & du petit triligne j'en ôte le petit, il reste le grand A 7 14 qui est égal à deux fois les petits secteurs, au triangle ACB & à l'espace 16 17 CB, qui est une autre conclusion.

Que si on veut retrancher du grand triligne A 7 14 le triangle ACB, il restera l'espace 7 CB 14 qui sera égal à deux fois les petits secteurs avec une fois CB 16 17, qui est une quatrième conclusion.

Maintenant il nous faut voir quelle raison il y a entre le triangle ABC & l'espace BC 7 14. Cela se fera considérant le carré A 7 duquel nous ôterons le carré AC. Ayant donc divisé le triligne A 7 14 en secteurs tous semblables & infinis, ainsi qu'il a été fait ci-dessus aux autres conclusions, & sçachant que les secteurs sont entr'eux comme leurs quarez, nous disons que le carré A 7 est égal aux quarez AC & C 7 plus le rectangle AC 7 pris deux fois. Si j'en ôte le carré AC, il me reste le carré C 7 plus le rectangle AC 7 deux fois. Il faut considérer quels solides ils font.

Tous les quarez C 7, M 6, & les autres sont tous égaux; & par ainsi tous joints ensemble font un parallépipède ou solide qui a pour hauteur & largeur la ligne C 7, & pour longueur une ligne telle qu'on voudra, sçavoir autant qu'on aura pris de fois & ajouté les quarez l'un à l'autre; c'est le premier solide qui se forme.

L'autre se fait du rectangle AC7 pris autant de fois que les susdits quarez, & forme un solide qui a pour hauteur C7 comme l'autre, mais sa longueur est diverse, sçavoir des lignes AC, AM, AL, & des autres qui toutes sont inégales.

Or ces deux solides se doivent mettre ensemble afin de les comparer à celui qui est composé des quarez AC, AM & autres qui tous sont inégaux; & partant ce solide fera racourci de deux côtez. Or ce solide se peut considérer comme si j'avois fait un cercle du centre A & de l'intervalle AD: car alors la ligne BC sera une touchante dudit cercle au point D; la ligne AD sera le sinus total; & les lignes AN, AO, AP seront toutes des sécantes, & ainsi le solide sera formé des quarez des sécantes. Or ces deux solides étant de même hauteur, sçavoir de la ligne C7 & autres, il est aisé de les joindre ensemble, & de tous deux en faire un solide composé de tous les quarez C7, M6, &c. d'une part, & de la ligne C7 multipliée par la somme des lignes AC, AM, & les autres prises deux fois (parce que le rectangle AC7 est deux fois dans le carré A7) c'est-à-dire, qu'il faut doubler les lignes AC, AM, & autres.

Le solide qu'il faut comparer à celui-ci est fait par la somme des quarez des lignes AC, AM, & des autres qui toutes sont inégales. Nous disons donc, Comme le solide fait par la somme des quarez AC, AM, & autres, est au solide composé des deux ci-devant mis; ainsi le triangle ABC est à la figure C7 14 B. Mais dans le premier solide les lignes C7, M6 me sont données, & partant leurs quarez: de plus les lignes AC, AM, & autres me sont aussi données, d'autant que la ligne AD (que je prens pour sinus total ou demi-diametre d'un cercle que je feins être fait) m'est donnée, & la ligne DE sur lesquelles j'ai formé ma conchoïde; & par le

moyen de AD sinus total & de l'angle BAD, je connois toutes les sécantes de ce cercle que je pose être décrite sur le rayon à AD: ces sécantes sont AN, AO, AP, & les autres qui suivent. Dans le dernier solide tous les quarrez de AC, AM me seront donnez, puisque les lignes sont données; & ainsi je joins les quarrez C 7, M 6 avec le rectangle fait de AC doublé & C 7, le tout pris autant de fois qu'il y a de quarrez. Or CA, & MA sont sécante; donc par le calcul il nous sera facile d'en trouver la valeur que nous comparerons avec le second solide qui est composé de l'aggrégé ou somme des quarrez des sécantes; & telle sera la raison de ABC à l'espace BC 7 14.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT
*un espace égal à un Quarré donné, & ce d'un
 seul trait de Compas.*

ON demande qu'il soit tracé sur un cylindre droit d'un seul trait de compas un espace égal au quarré de la ligne AB. Pour le faire je coupe en deux également la ligne AB au point C, & je décris le cercle FME, le diametre duquel FE soit égal à AC. Sur ce cercle j'éleve un cylindre dont la hauteur soit du moins le double de FE, & au milieu de cette hauteur soit le point F; puis ouvrant le compas de l'intervale FE, je décris un espace sur la superficie du cylindre. Je dis que cet espace vaut le quarré de AB.

Pour le prouver, je divise le cercle en parties infinies aux points E G H I & autres: de chacun de ces points j'éleve des perpendiculaires au plan du cercle en nombre infini, comme les points sont infinis: du point E qui est l'extrémité du diametre, je tire à chaque point de la division des lignes droites E G, E H, E I, &

autres qui sont dans le demi-cercle ELF. Or toutes ces petites lignes sont des sinus du quart d'une circonférence; ce qui se connoitra, faisant du rayon FE & du centre F un cercle qui ait pour diametre le double de EF; mais ici je me contente de la quatrième partie de la circonférence. Si donc du centre F je tire des lignes en nombre infini qui soient toutes égales à FE, elles iront jusques à la circonférence de ce cercle, & couperont toutes les petites lignes EG, EH & les autres à angles droits, car l'angle se trouve dans le demi-cercle ELF; & partant toutes les petites lignes sont les sinus du quart d'une circonférence.

Nous sçavons que le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence, comme tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Nous sçavons aussi que le quarré du demi-diametre est égal à la figure qui est faite par les infini petits sinus qui divisent ce quart de circonférence. Or le demi-diametre est FE qui est égal à la ligne droite AC moitié de AB; partant son quarré quatre fois vaudra le quarré de AB. Or les sinus EG, EH, &c. sont égaux aux perpendiculaires élevées des points GH, &c. jusques au retranchement fait par le compas, comme il sera montré; & par ainsi la figure ou l'espace tracé par le compas qui est ouvert de la grandeur EF, l'un des pieds posé sur F qui est un point pris en quelque endroit que ce soit de la surface du cylindre, & l'autre pied, par exemple sur le point E, & tournant sur la superficie du cylindre tant qu'il revienne au même point E: cet espace compris sur le cylindre vaut quatre fois l'espace compris des petits sinus qui divisent le quart de la circonférence; car le compas parcourt les quatre quarts de la circonférence du cylindre, s'il se peut ainsi dire. Or le cylindre est présumé prolongé tant en haut qu'en bas autant qu'il

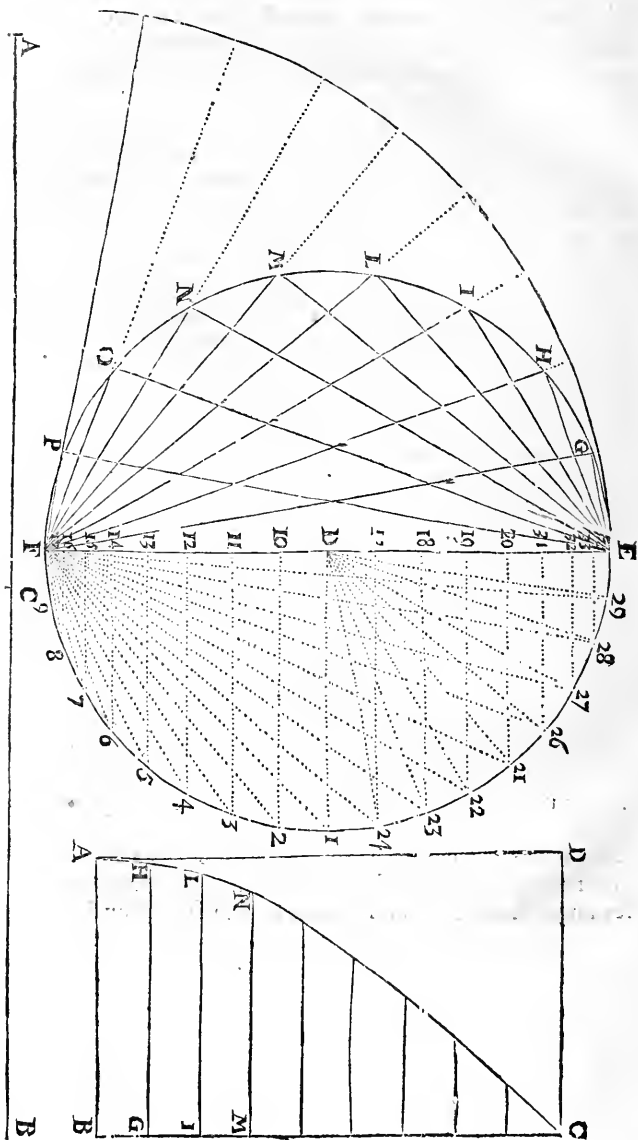
faudra , dessus & dessous ledit point F , & le cercle FME
parallèle à sa base pour satisfaire à la question.

Reste à montrer que la ligne EH est égale à la per-
pendiculaire élevée du point H , quand elle a été re-
tranchée par le compas ouvert de la grandeur FE. Pour
cet effet , il faut tirer la ligne FH , & concevoir deux
triangles , l'un de la ligne FH & FE portée à l'extrémi-
té de la perpendiculaire tirée du point H , & qui monte
vers le haut du cylindre & de ladite perpendiculaire
qui sort de H jusques au retranchement fait par FE portée
sur la surface du cylindre. Ces trois lignes font un trian-
gle rectangle qui est égal au triangle FEH ; car en tous les
deux triangle la ligne FH est commune ; l'angle en H est
droit , car il se fait de la ligne FH & de la perpendi-
culaire sur le point H en l'un des triangles , sçavoir en
celui qu'on veut montrer égal à FEH & pareillement
l'angle en H de l'autre triangle FEH est droit , étant
dans le demi-cercle ; la ligne FE qui a coupé la perpen-
diculaire élevée sur le point H est égale à FE ; partant
la ligne EH est égale à ladite perpendiculaire qui part
du point H , & qui est coupée par la ligne FE par la
révolution du compas. Le même se prouvera de toutes
les autres lignes , EG , EI , EL , EM , & autres.

Or cette figure se trouve être la même que la troi-
sième figure ci-devant , si on suppose que la circonfé-
rence EHLF est égale à BC dans la troisième figure ,
& qu'elle est divisée infiniment en sinus GE , HE , IE ,
& les autres , tout ainsi que la ligne BC de la troisième
figure est divisée en sinus infinis , sçavoir GH , IL , MN ,
&c. Or nous devons considérer cette troisième figure
ou bien la présente , car il n'importe pas , & voir ce
qu'elles font. Par exemple , quand la troisième figu-
re tourne sur la ligne BC , elle fait un cylindre avec
le rectangle BD , & un autre solide avec la figure courbe

ACB

*On conside-
re ici deux
triangles
qu'on veut
prouver être
égaux : l'un
est FHE ;
l'autre a
pour base
FH , pour ca-
ter la perpen-
diculaire ti-
rée du point
H jusques au
retranche-
ment fait par
le compas , &
l'hypotenuse
sera égale à
FE , puisque
c'est l'ouver-
ture du com-
pas.*



A C B. Je trouve que le cylindre est double du petit solide fait de la figure courbe. Pour le prouver je me sers de la treizième figure présente, & je feins avoir tiré une infinité de lignes du point F à tous les points, comme FP, FO, FN, & autres, qui sont toutes égales aux premières tirées du point E aux mêmes points, sçavoir à EG, EH, EI, &c. Je dis ensuite que les quarrés de GE & GF sont égaux au quarré de FE : il en est de même des quarrés de EH & HF, & ainsi des autres ; partant tous ces quarrés ensemble seront égaux au quarré de EF pris autant de fois. Mais dans ces petits quarrés je n'ai besoin que de ceux qui composent la figure, sçavoir des quarrés de EG, EH, EI, & autres tirés du point E, qui font la moitié de tous ceux que j'avois comparez avec le grand quarré FE ; partant tous ces petits quarrés seront à autant de fois le grand quarré FE comme la moitié au tout. Mais les solides sont entr'eux comme tous les quarrés pris ensemble ; partant le petit solide fait de la figure courbe ABC en la troisième figure, sera au cylindre fait de BD, comme 1 à 2 ; ce qu'il falloit démontrer.

On considérera encore en la même figure un autre trait de compas. Je pose une des pointes sur le point F que je prens dans la circonférence du cercle F I E L, lequel cercle est la base mitoyenne du cylindre qu'en suppose toujours prolongé en haut & en bas autant qu'il est nécessaire. On met donc l'un des pieds du compas en F, & l'ouverture d'icelui est F I qui est la soutendante du quart de la circonférence totale F 5 1. Or cette circonférence est divisée en parties égales & infinies aux points 2, 3, 4, &c. sur chacun desquels j'éleve des perpendiculaires, comme ci-devant : des mêmes points je tire des perpendiculaires sur le demi-diamètre FD qui le divisent en une infinité d'autant de parties inégales.

Il faut maintenant considérer les propriétés de toutes ces lignes. Nous voyons qu'il se fait plusieurs triangles rectangles dont les côtés sont F_2, F_1 , & la perpendiculaire sur le point 2, laquelle est en l'air; le second, F_3, F_1 , & la perpendiculaire en l'air sur le point 3; F_4, F_1 , & la perpendiculaire en l'air sur le point 4, & cette perpendiculaire tirée en l'air s'augmente à mesure que la soutendante diminue. Car les quarrés des deux lignes F_2 , & la perpendiculaire en l'air sur le point 2, sont égaux au carré de F_1 ; les quarrés de F_3 , & de la perpendiculaire sur 3 en l'air sont égaux au même carré F_1 , & ainsi des autres. Mais le carré F_1 est égal au rectangle EFD , le carré F_2 est égal au rectangle EF_{10} , le carré F_3 au rectangle EF_{11} , & ainsi des autres quarrés & rectangles, partant tous les rectangles EFD , EF_{10} , EF_{11} , & les autres, sont entre-eux comme les quarrés F_1, F_2, F_3 , &c. & partant tous les rectangles EF_{10}, EF_{11} , & autres tous ensemble sont au grand rectangle EFD , comme tous les quarrés F_2, F_3 , &c. sont au grand carré F_1 . Quand du rectangle EFD j'ôte le rectangle EF_{10} , il reste le rectangle EF par $10D$ qui est égal au carré de la perpendiculaire tirée du point 2 en l'air; quand du même rectangle EFD j'en ôte le rectangle EF_{11} , il reste le rectangle EF par $11D$ qui est égal au carré de la perpendiculaire tirée du point 3 en l'air. (Or j'ai besoin des quarrés de ces perpendiculaires, d'autant qu'en tournant la troisième figure sur BC , ces lignes représentent les demi-diamètres des cercles qu'il faut comparer avec le carré du demi-diamètre de la base du cylindre.) Mais tous les rectangles susdits ont une même hauteur, sçavoir FE ; & partant ils sont entr'eux comme les lignes FD, F_{10}, F_{11} . Si on ôte de la base d'un rectangle la base d'un autre rectangle, il restera leur différence: comme si de

FD j'ôte F 10, il restera D 10; si de FD j'ôte F 11, il restera D 11, & ainsi des autres. Or ces restes sont homologues avec les quarréz des lignes perpendiculaires qui restent quand j'ai ôté le quarré F 2 du quarré F 1: du même quarré F 1 j'ai ôté le quarré F 3, puis F 4, &c. il reste les quarréz des perpendiculaires tirées en l'air des points 2, 3, 4, &c. partant les lignes D 10, D 11, & autres garderont entr'elles la même raison que les quarréz desdites perpendiculaires. Mais les lignes D 10, D 11, D 12, &c. sont sinus; car les lignes 2 10, 3 11, 4 12, &c. sont perpendiculaires sur le diametre EF; donc les quarréz des perpendiculaires sont au quarré de la grande FI prise autant de fois, comme tous les petits sinus sont au sinus total DF pris autant de fois. Mais les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, comme le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence; partant le solide fait par la révolution de la figure courbe ACB sur la ligne BC, sera au cylindre fait du rectangle BD, comme le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence.

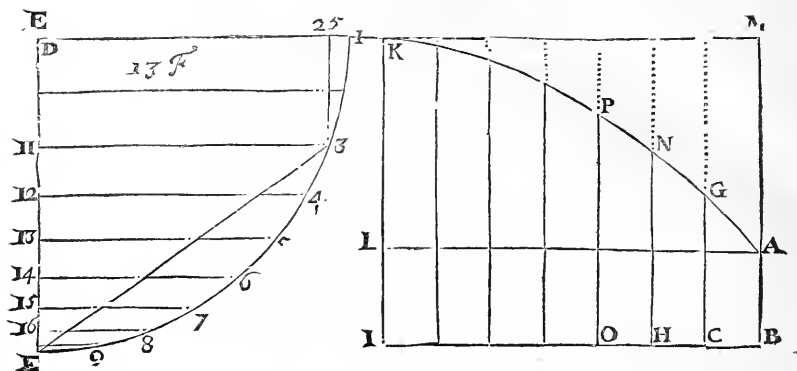
Il faut entendre ici que la figure ABC est faite de toutes les perpendiculaires élevées sur les points 2, 3, 4, &c. & que AB est égale à FI.

Considérons maintenant le trait du compas fait de l'intervale F 3, gardant toujours le point F pour poser ledit compas. Il se trouve que le quarré F 4 avec le quarré de la perpendiculaire tirée du point 4 en l'air, est égal au quarré de F 3; le quarré F 5 avec celui de la perpendiculaire sur le point 5 en l'air, sont égaux au même quarré F 3, & ainsi des autres. Or le rectangle EF 11 est égal au quarré F 3, & le rectangle EF 12 est égal au quarré F 4, & ainsi des autres rectangles & quarréz. Si donc du rectangle EF 11 j'ôte le rectangle EF 12, il reste le rectangle EF par 12 11 égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 tirée en l'air. Si du même rectangle EF 11 on ôte le rectangle EF 13, il reste le rectangle EF, par 13 11 qui est égal au quarré de la perpendi-

culaire tirée sur 5, & ainsi des autres. Que si nous faisons une parabole être tirée du sommet 11 vers la circonférence du cercle, & que des points 11, 12, 13, 14, 15, pris sur son axe 11 F on tire des ordonnées jusqu'à la circonférence de ladite parabole, les quarrés de telles ordonnées seront égaux aux rectangles; sçavoir le quarré de la ligne tirée du point 12 à la parabole, sera égal au rectangle fait par le côté droit de ladite parabole qui est FE, & la portion de l'axe 11 12; le quarré de l'ordonnée tirée du point 13 à la parabole, sera égal au rectangle EF par 11 13, & ainsi des autres. Ce qui fait voir que les quarrés des ordonnées sont égaux aux quarrés des perpendiculaires qu'on a tirées en l'air des points 3, 4, 5, &c. & par conséquent les ordonnées seront égales ausdites perpendiculaires. Mais d'autant que les perpendiculaires sont en égale distance l'une de l'autre, & les ordonnées inégalement distantes l'une de l'autre, cela est cause qu'on ne peut pas comparer le plan fait par les perpendiculaires avec le plan qui se fait par les ordonnées, d'autant que les perpendiculaires divisent la ligne en parties égales, mais les ordonnées ne divisent pas l'axe également, mais inégalement; & ainsi le plan qui se fait des perpendiculaires ne peut pas être comparé avec le plan fait par les ordonnées pour en sçavoir la raison.

Maintenant il faut considérer la raison des solides, si la figure se tournoit sur la ligne F 5 3 étendue en ligne droite, supposant que le trait du compas se fasse du point F, & de l'ouverture F3. Or nous avons trouvé par le précédent discours, que le rectangle EF par 11 12 est égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 en l'air; le rectangle EF par 11 13, égal au quarré de la perpendiculaire sur 5 en l'air, & ainsi des autres: partant toutes ces lignes seront homologues avec les quarrés.

desdites perpendiculaires. Or les lignes $11\ 12$, $11\ 13$, $11\ 14$, &c. ne sont point sinus, parce qu'elles ne partent pas du demi-diametre $D\ 1$, car il s'en faut la ligne $D\ 11$ qu'elles ne viennent jusques à $D\ 1$. Que si elles étoient des sinus, nous ferions la raison comme en l'autre précédente raison des solides, sçavoir comme les petits sinus au sinus total $D\ 1$ pris autant de fois. Or les lignes $11\ 12$, $11\ 13$, $11\ 14$, &c. sont les mêmes que si du point 4 on menoit une perpendiculaire sur $11\ 3$, & du point 5 & 6 sur la même $11\ 3$, & ainsi de tous les autres points qui divisent la circonférence. Or toutes ces lignes ne sont point sinus, car il s'en faut la ligne $11\ D$, ou la perpendiculaire qui seroit tirée du point 3 sur la ligne $D\ 1$, sçavoir $3\ 25$. Comme donc la ligne $11\ 3$, ou $D\ 25$ son égale, à la circonférence $F\ 5\ 3$, ainsi tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Mais pour trouver l'équation des solides il faut avoir la différence des sinus, sçavoir $D\ 12$, $D\ 13$, $D\ 14$, $D\ 15$, $D\ 16$ moins autant de fois $D\ 11$; partant toutes les différences des petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, moins le même espace $D\ 11$ pris autant de fois, comme le solide fait par les quarez des perpendiculaires au cylindre qui se fait. Ceci sera mieux représenté par la petite figure qui est ici. Que IB soit égal à la circonférence $F\ 5\ 3$; AB à $D\ 11$ ou à $3\ 25$; & les lignes CG , HN , OP , &c. égales à $D\ 12$, $D\ 13$, $D\ 14$, & autres sinus, desquels il faut retrancher AB ou $D\ 11$ pris autant de fois, c'est-à-dire, le parallelogramme $ABIL$. Tout cela se doit comparer au sinus total pris autant de fois, qui est DF en la grande figure, mais en la petite c'est IK qui fait le parallelogramme $IKBM$ duquel il faut ôter le même parallelogramme $ABIL$; & partant il reste le parallelogramme $LAMK$, & de $IKAB$ il restera le triligne $LAPK$; & partant le solide fait par les quar-



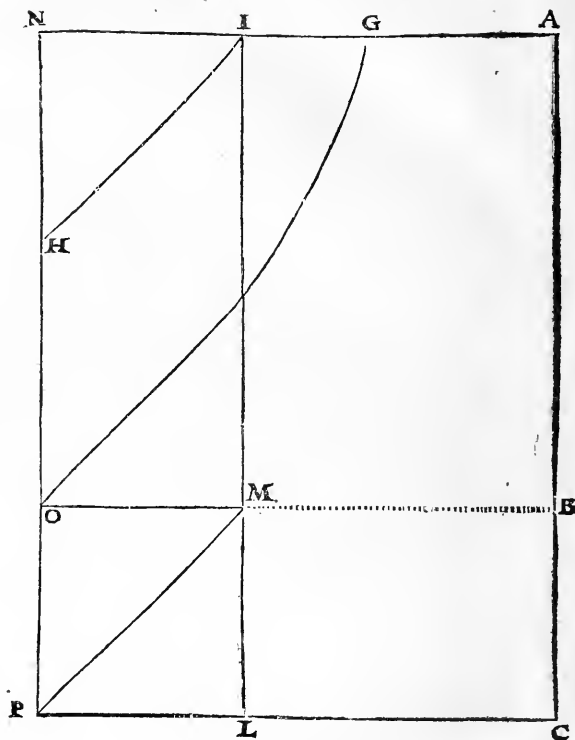
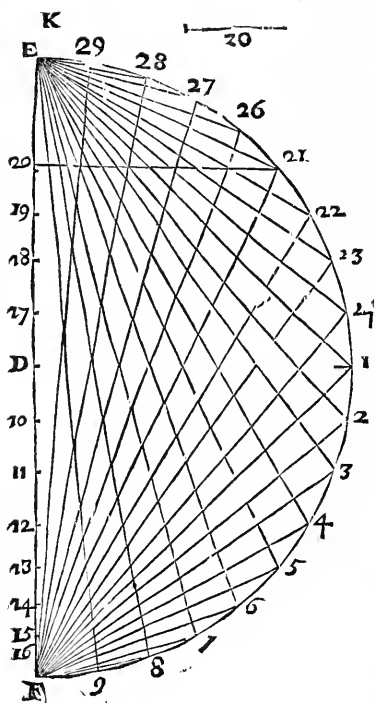
rez des perpendiculaires est au cylindre de la grande, comme le triligne LAK au parallelogramme LKMA. Mais ne nous contentant pas de cela, nous cherchons des raisons en lignes; & retournant à la grande figure, nous disons: Comme tous les petits sinus sont au grand sinus pris autant de fois; ainsi le sinus 113 est à la circonférence F3. Or il faut ôter de cette raison ce qui y est de trop, & dire: Comme tous les petits sinus moins 11D pris autant de fois, au sinus total pris autant de fois, moins le même 11D pris autant de fois; & changeant la proportion on dira: Comme le sinus total DF est à D11, ainsi la circonférence F53, sera à quelque portion de la même circonférence F53, laquelle portion il faut ôter de la ligne ou sinus 113; & par ainsi la ligne 113, quand on en a ôté ce qui avoit été retranché de ladite circonférence F53, est à ce qui reste de ladite circonférence F53, comme le petit solide fait des quarrez de perpendiculaires est à leur cylindre. Or tous les sinus & la circonférence me sont

donnez; & partant la raison des solides sera connuë, ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut considérer sur la même figure la raison des solides entr'eux quand elle roule sur la ligne circulaire $F_2 21$ étenduë comme droite, & quand l'ouverture du compas est $F 21$, sans répéter ce qui a été dit ci-devant : on trouve que les quarrez des perpendiculaire tirées en l'air des points $21, 22, 23, 24, \&c.$ sont entr'eux comme les lignes $20 19, 20 18, 20 17, \&c.$ Or toutes ces lignes se doivent considérer en cette forte, $20 D - 19 D$; $20 D - 18 D$; $20 D - 17 D$, & ainsi des autres. Les suivantes se considèrent ainsi, $20 D + 10 D$; $20 D + 11 D$; $20 D + 12 D$; $20 D + 13 D$, &c. ensorte que $20 D$ est pris autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence $F_2 21$ & les autres sinus, sçavoir $D 10, D 11, D 12, D 13$ &c. sont pris autant de fois qu'il y a de divisions au quart de la circonférence $F_5 1$. De tout ceci il en faut ôter les lignes $D 19, D 18, D 17$, & les autres prises autant de fois qu'il y a de divisions dans la circonférence $1 21$. Voilà une des équations; l'autre est la ligne $F 20$ prise autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence $F_2 21$.

*Voiez la
Figure sui-
vante.*

Pour mieux entendre ce discours, on fera la figure qui est ici à côté du demi-cercle, en laquelle AB vaut F_1 , quart de la circonférence; BC vaut $1 21$; & la route AC vaut la circonférence $F_3 21$; AN vaut $F 20$, & par ainsi le parallelogramme NC vaut ce qui est contenu dans $20 F_2 21$; NG vaut FD sinus total; AG ou son égale NI vaut $D 20$; NH égale à OP vaut la circonférence $1 21$. Nous disons donc que comme le rectangle $ANPC$ est au rectangle $INPL +$ le triligne $NGO -$ le triligne INH ou OMP son égal, ainsi le cylindre est au solide qui se fait quand la figure retrans-



chée du cylindre tourne sur la circonférence FI 21 étendue en ligne droite; ce qu'il falloit démontrer.

Nous venons maintenant à une considération qui est que prenant toujours le même point F, & l'ouverture du compas telle que son quarré soit égal aux quarrés de FE & de la ligne 30, il se trouve, par exemple, que les

les quarez de FE & de 30 sont égaux aux quarez de F 22 & de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22, & ainsi de tous les autres. Or le quarré FE vaut les quarez E 22 & 22 F; partant les quarez de E 22, 22 F, & de 30 sont égaux au quarré de 22 F & à celui de la perpendiculaire tirée de 22 en l'air. J'ôte des deux équations ce qui est commun, sçavoir le quarré F 22, & il me reste d'une part le quarré E 22 + le quarré 30 égal au quarré de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22; & ainsi tous les quarez des perpendiculaires tirées en l'air de tous les points qui divisent la demi-circonférence, sont égaux aux quarez des lignes qui partent du point E, & se terminent ausdits points, plus le quarré de la ligne 30. Il faut remarquer que la ligne 30 ne change point, mais les autres changent toujours, puisque les quarez E 22 & 22 F, E 23 & 23 F, & tous les autres sont égaux au quarré FE pris autant de fois. Mais de tous de ces quarez je n'ai besoin que de la moitié; partant cette moitié sera égale à la moitié du quarré FE pris autant de fois. (On ne prend que la moitié de cette somme de quarez, parce qu'on n'en a pas besoin d'autre chose; car joignant lesdits quarez au quarré de 30 pris autant de fois, on aura la valeur des quarez des perpendiculaires en l'air, qui est ce qu'il faut avoir.)

Nous concluons donc que le solide qui se fait par la révolution des perpendiculaires qui tournent sur la circonférence étendue comme une ligne droite, est égal à deux cylindres, le premier desquels a d'une part la ligne FE, & de l'autre la même circonférence étendue; & de celui-ci il n'en faut prendre que la moitié. L'autre cylindre a la même circonférence étendue, & la ligne 30 pour hauteur; car en l'un & l'autre cylindre, la figure tourne sur la circonférence étendue; & ainsi le cylindre des perpendiculaires est égal à ce petit cylin-

dre & à la moitié du grand tout ensemble; ce qu'il falloit démontrer.

Il faut voir maintenant la comparaison des plans, & comment ils sont entr'eux. Nous avons trouvé que les quarrés de $E 22$ & de 30 sont égaux au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22 , & le rectangle $FE 19$ est égal au quarré $E 22$. Je fais un rectangle égal au quarré 30 sur la ligne EF , & sur quelque autre ligne tirée depuis E en K , & ainsi les deux rectangles joints ensemble, sçavoir $FE 19$, & FEK , qui valent le rectangle $FEK 19$ sont égaux aux quarrés de $E 22$ & de la perpendiculaire 30 , comme aussi au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22 . Or si du point K comme sommet je décris une parabole, dont le côté droit soit égal à FE , & KF soit l'axe: le quarré de l'ordonnée qui partira du point 19 sera égal au rectangle FE par $19 K$, & ainsi de toutes les autres; partant les quarrés desdites ordonnées seront égaux aux quarrés des perpendiculaires tirées en l'air, & les mêmes ordonnées égales aux perpendiculaires; c'est pourquoi le plan occupé par les perpendiculaires devroit être égal au plan occupé par les ordonnées.

Mais la comparaison ne se peut pas faire de la sorte, parce que les perpendiculaires sont également distantes l'une de l'autre; mais les ordonnées le sont inégalement, puisque la ligne FE est toute coupée en parties inégales, & partant le plan ne peut être comparé au plan.

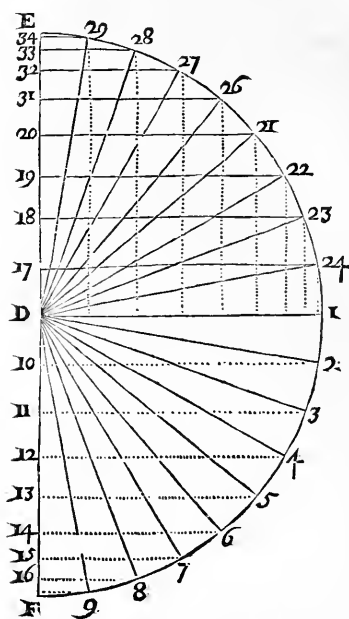
Nous venons maintenant à considérer qu'elle est la raison, ou comparaison des quarrés des sinus avec le quarré du diamètre FE . La circonférence $F1E$ est divisée en parties infinies & égales, & les lignes $24 17$, $23 18$, $22 19$, $21 20$, $26 31$, $27 32$, $28 33$, & $29 34$ sont toutes sinus droits. Je dis que le quarré $D 24$ demi-diametre vaut le quarré $17 24$, & le quarré $17 D$ qui est

Voyez la
Figure suivante.

sinus de complément égal à la ligne tirée du point 24
 perpendiculaire sur le demi-diamètre D 1, & est égale
 au sinus 29 34. Le même carré du demi-diamètre D 23
 est égal aux carrés de 18 23, & de 18 D sinus de com-
 plément égal à la perpendiculaire tirée de 23 sur D 1,
 & aussi au sinus droit 28 33. Le carré de D 22 est égal
 aux carrés de 22 19, & de 19 D sinus de complément
 égal à la perpendiculaire tirée de 22 sur D 1 & au sinus
 27 32, & ainsi de tous les autres, en telle sorte que tous
 les sinus de complément sont égaux aux sinus droits,
 ci-devant marquez; & ainsi les carrés de tous les si-
 nus pris deux fois (ce qui se doit faire, puisque les uns
 sont égaux aux autres) sont égaux au carré du demi-
 diamètre D 1 pris autant de fois qu'il y a de sinus. Mais
 le carré du demi-diamètre n'est que le quart du car-
 ré du diamètre; partant le carré du diamètre sera huit
 fois la somme des carrés des sinus, c'est-à-dire, que les
 carrés des sinus sont au carré du diamètre pris au-
 tant de fois comme 1 à 8. Voilà la première partie.

Pour la seconde. Le carré de FE est égal aux car-
 rers de F 33 & 33 E, plus deux fois le rectangle F 33 E,
 qui est à dire le carré 28 33 deux fois; le même car-
 ré FE est égal aux carrés F 32 & 32 E, plus deux fois
 le rectangle F 32 E, ou deux fois le carré 32 27; le
 même FE est égal aux carrés F 31 & 31 E, plus deux
 fois le rectangle F 31 E, ou le carré 31 26; le même
 carré FE est égal aux carrés F 20 & 20 E, plus deux
 fois le rectangle F 20 E, ou le carré 20 21, & ainsi
 de tous les autres tant en haut qu'en bas: & de cette
 sorte le carré FE vient à être égal à deux fois tous ces
 petits carrés F 34, 34 E; F 33, 33 E; F 32, 32 E, &
 tous les autres en telle sorte que le carré FE pris au-
 tant de fois est double de tous ces carrés, & de plus,
 à deux fois les carrés de 34 29, 33 28, 32 27, & les

autres. Nous avons vû comme tous les quarrez de ces



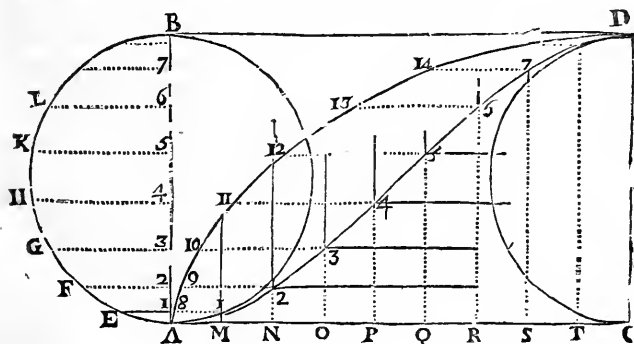
sinus 34 29, 33 28, &c. sont au carré du diamètre FE pris autant de fois, comme 1 à 8. Or ils sont ici deux fois & les sinus versés aussi deux fois; partant deux fois les quarrez des sinus versés, & deux fois les quarrez des sinus droits sont égaux à huit fois les quarrez des sinus droits; & ôtant de part & d'autre deux fois les quarrez des sinus droits, restera d'une part deux fois les quarrez des sinus versés égaux à six fois les quarrez des sinus droits; & pre-

nant la moitié, les quarrez des sinus versés seront égaux à trois fois les quarrez des sinus droits; partant les quarrez des sinus versés sont à ceux des sinus droits, comme 3 à 1, mais le carré de FE pris autant de fois est aux quarrez des sinus droits, comme 8 à 1: donc le carré de FE pris autant de fois est aux quarrez des sinus versés, comme 8 à 3, ce qu'il falloit trouver.

La précédente conclusion nous servira pour trouver la raison du solide que fait la Roulette, quand elle tourne sur la circonférence du cercle générateur étendu

en ligne droite. Car le solide fait par les sinus versés (voyez la figure de la Roulette, qui est placée ci-après page suivante) sçavoir par $M_1, N_2, O_3, P_4, \&c.$ est au solide fait par le parallelogramme composé du diamètre du cercle, & de la circonférence d'icelui étendue en ligne droite, comme 3 à 8 par la conclusion précédente. Nous sçavons aussi que l'espace compris entre les deux lignes $A_1 D$ & $A_4 D$ est égal au demi-cercle AHB , parce que les lignes d'un des espaces sont égales aux lignes de l'autre espaces par la construction : partant le double de l'espace est égal au cercle entier $AHBA$, de sorte que tout ce qui se dira du cercle se doit entendre dudit espace doublé. Mais il a été démontré que le cylindre de AB est au solide qui se fait lorsque la figure $A_1 D_5 A$ tourne sur la ligne ou circonférence AC , comme 8 à 2, lesquels 2 joints à 3 qu'on a trouvez ci-devant, font 5, qui est la raison qu'il y a du solide entier de la roulette, à son cylindre $ABDC$ doublé; car $ABDC$ n'est que la moitié de l'espace parcouru par la Roulette.

Remarquez que ce solide qui est au cylindre AD tour-



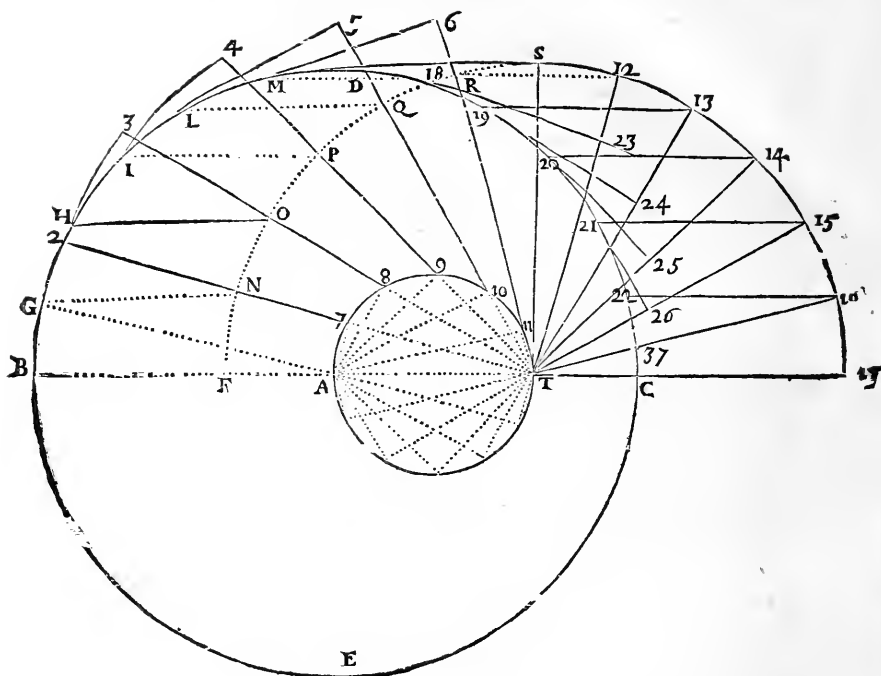
né sur C, comme 1 à 4, ou 2 à 8 : est celui que fait l'espace compris entre les deux lignes A 12 D & A 4 D, qui est égal à celui que feroit le demi-cercle AHB par la même révolution, parce que l'une & l'autre figure a ces lignes égales, & posées en même distances de AC, & partant est le quart dudit cylindre AD; & joignant ledit solide à celui qui se fait par l'espace compris entre les lignes A 4 D & AC, qui est audit cylindre comme 3 à 8, on aura le solide fait par l'espace compris entre A 12 D & AC, qui sera 5, ledit cylindre AD étant 8.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT

un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique donné, & d'un seul trait de Compas.

LE cercle BDCE est la base d'un cylindre oblique; les côtez duquel partans des points B, G, H, I, &c. vont obliquement rencontrer un autre cercle en haut, qui est l'autre base du cylindre, & est parallèle au premier BDCE :) ce cercle peut être représenté par le cercle FNOP, &c. mais il est en l'air & à plomb au-dessus de celui-ci) l'axe du même cylindre sort du centre A, va rencontrer obliquement le centre dudit cercle supérieur. Or nous feignons que du sommet de l'axe soit tirée une perpendiculaire qui tombe sur le point T, & que du sommet de tous les côtez du cylindre s'abaissent des perpendiculaires qui tombent aux points F, N, O, P, &c. qui font la circonférence d'un cercle dont le centre est le point T, & lequel est égal au premier BDC, comme il est aisé à voir. Or divisant les deux cercles ou bases du cylindre en parties infinies aux points G, H, I, L, &c. feignant des lignes tirées GH, HI, IL, &c. ces petites lignes passent pour la circonférence même, & le cylindre en cette sorte se

trouve divisé en infinies parallelogrammes ; car les cô-
 tez du cylindre avec la portion de la circonférence des
 deux cercles font des parallelogrammes qui composent
 tout l'espace du cylindre ; de sorte qu'il faut comparer
 tous ces parallelogrammes au grand parallelogramme
 pris autant de fois. Si du point G je tire une ligne tou-
 chante G 2 , & du point correspondant à G , sçavoir de
 N , je tire une perpendiculaire à ladite touchante , qui
 la rencontre au point 2 ; si du sommet du côté du cy-
 lindre (j'entens du côté qui commence en G , & va fi-
 nir à l'autre cercle au-dessus du point N) je tire une li-
 gne au point 2 : cette ligne sera perpendiculaire à la
 ligne G 2 . Du point H je tire une ligne touchante , &
 du point O correspondant à H , je tire une perpendi-
 culaire à ladite touchante , sçavoir O 3 , & ainsi des au-
 points I & P , L & Q , &c. je ne parle plus de la ligne
 tirée d'enhaut , car il suffit d'avoir dit une fois qu'elle
 sera perpendiculaire à la même touchante. Ayant ainsi
 tiré autant de perpendiculaires qu'il y a de touchantes
 à chaque point , ces lignes seront N 2 , O 3 , P 4 , Q 5 ,
 &c. Si chacune de ces lignes est continuée comme 2 N 7 ,
 3 O 8 , 4 P 9 , &c. elles iront toutes finir au point T
 centre du cercle FS 17 . Pour la preuve , nous feignons
 qu'il y a une ligne AG , laquelle avec 2 7 compose un
 quadrilatre : en icelui l'angle 7 2 G par la construction
 est droit ; l'angle A G 2 est droit , sçavoir du centre au
 point d'atouchement ; partant 2 N , & GA sont paralle-
 les. Soit tirée NT , l'arc GB étant égal à l'arc NF. Il
 s'ensuit que l'angle GAB est égal à l'angle NTF , puis-
 qu'ils sont faits tous deux aux centres T & A des deux
 cercles égaux BDC & FS 17 , & partant la même GA sera
 parallele à NT ; donc 2 N 7 , & NT sont paralleles en-
 tr'elles ; mais elles se joignent au point N , & partant
 elles ne font ensemble qu'une même ligne.



Maintenant il faut confiderer les parallelogrammes ; au lieu defquels je prens la perpendiculaire qui tombe du fomme't sur les touchantes ci-devant , comme du fomme't du cylindre qui part de G & va en l'air , j'abaisse la perpendiculaire sur le point 2 , laquelle eft la hauteur ou perpendiculaire du parallelogramme compofé de ligne G 2 , qui paffe dans les indivifibles pour
circonférence,

circonférence, & du côté du cylindre qui part de G & va en l'air, lequel côté vaut pour deux côtés du parallélogramme, sçavoir commençant en G & 2, & finissant en la circonférence de la base supérieure du cylindre; & par ainsi on a les quatre lignes du parallélogramme, sçavoir G 2 (qui passe pour circonférence) & son égale en la circonférence de la base supérieure, & les deux côtés du cylindre. Mais au lieu du parallélogramme nous considérons un triangle qui a pour un de ses côtés la perpendiculaire tirée du sommet du côté sur le point 2, & qui se peut nommer la perpendiculaire ou hauteur du parallélogramme; & pour les deux autres côtés, la ligne G 2, & le côté du cylindre tiré de G en l'air. Or en ce triangle le côté du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire tirée du sommet & finissant en 2. Il faut ensuite considérer un autre triangle, dans lequel la même perpendiculaire tombant en 2 soit un des côtés; 2 N soit un autre côté; & le troisième soit la ligne tombante perpendiculairement du sommet du côté sur le plan du cercle au point N. Or en ce triangle la perpendiculaire qui tombe sur 2 peut autant que les deux lignes 2 N, & la perpendiculaire qui tombe du sommet sur N. Mais cette perpendiculaire qui tombe du sommet sur N, O, P, Q, & autres points de la circonférence est toujours égale: mais les lignes 2 N, 3 O, 4 P, 5 Q, &c. sont inégales; car 2 N vaut 7 T; 3 O vaut 8 T; 4 P est égale à 9 T, & ainsi des autres qui toutes sont inégales.

Au premier triangle G 2 & l'autre point qui est au cercle supérieur le côté du cylindre qui va de G en l'air à l'autre cercle supérieur, vaut la ligne tirée du sommet (qui est ce troisième point en l'air) & qui finit en 2, & la ligne G 2. (on doit entendre ceci de tous les autres points & triangles qui se peuvent former de

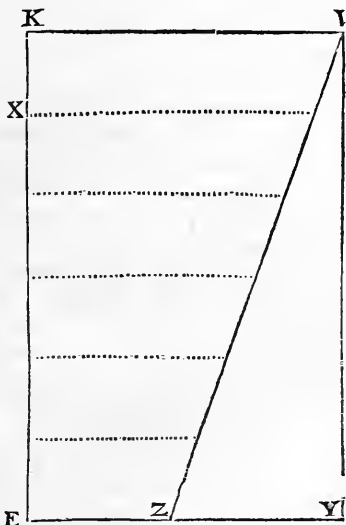
la même sorte.) Mais les lignes G_2 , H_3 , I_4 &c. vont toujours augmentant; car G_2 est égal à la soutendante A_7 , la ligne H_3 à A_8 , I_4 à A_9 ; toutes lesquelles lignes A_7 , A_8 , A_9 sont inégales. Mais avant que de conclure il faut prouver que la ligne G_2 est égale à A_7 , H_3 à A_8 , & ainsi des autres; de plus que $2N$ est égale à $7T$, $3O$ à $8T$, &c. Pour cet effet, il faut considérer les triangles $2GN$, & AT_7 , auxquels l'angle $2NG$ est égal à l'angle AT_7 ; car les lignes GN , AT sont parallèles, l'angle N_2G est droit, par la construction, & pareillement T_7A qui est dans le demi-cercle, & partant le troisième angle est égal au troisième; la ligne GN est égale à AT , & partant tout le triangle à l'autre triangle, & partant la ligne $2N$ à $7T$, & G_2 à la soutendante A_7 ; ce qu'il falloit démontrer.

Il nous reste à voir le rapport & la raison de tous les petits parallelogrammes à leur plus grand pris autant de fois. Or il faut considérer que les petits parallelogrammes bien qu'ils ayent les côtez égaux, car ils sont composez des côtez du cylindre & de la portion de la circonférence divisée en parties égales infinies, & cette division est faite aux deux cercles ou bases d'icelui cylindre; & d'autant que les angles sont inégaux, les parallelogrammes sont inégaux, & ainsi leur hauteur sera inégale, c'est par cette hauteur qu'il faut considérer lesdits parallelogrammes. Il faut voir premierement le plus grand de tous qui est fait de BG , tant en la base du cylindre BDC , qu'en l'autre qui est en l'air, & des côtez du cylindre. Or en ce parallelogramme il faut remarquer que la perpendiculaire qui est la hauteur dudit parallelogramme, & qui du sommet tombe sur le point B , n'est autre chose que le côté du cylindre; & considérant le second parallelogramme qui a pour côtez GH & les côtez du cylindre, on voit que ce côté du cylindre vaut en

puissance la ligne G_2 , & la perpendiculaire ou hauteur du même parallélogramme ; & partant ladite perpendiculaire ou hauteur du parallélogramme est plus petite que la perpendiculaire du premier , qui est égale au côté du cylindre ; & par ainsi ces hauteurs perpendiculaires ou vont toujours en diminuant jusques au quart de cercle , & puis après vont en croissant au quart suivant.

Remarquez que les lignes G_2, H_3, I_4, L_5 qui sont touchantes , passent pour la circonférence des divisions du cercle , & pour côtez des parallélogrammes.

Il faut entendre en cette figure rectiligne , que KV est égale à la plus grande des perpendiculaires , & aussi au côté du cylindre , & qui tombe perpendiculairement sur le côté BG au point B : la ligne KX & les autres divisions représentent & sont égales à celles de la circonférence , comme KX à BG , & ainsi des autres ; car KE est supposée égale au quart de la circonférence BHD . Le plus grand des parallélogrammes est fait des lignes KV, KX ; & quand il est pris autant de fois qu'il y en a de petits , il occupe l'espace $KV-$



YE ; partant toutes ces lignes sont à la grande KV prise

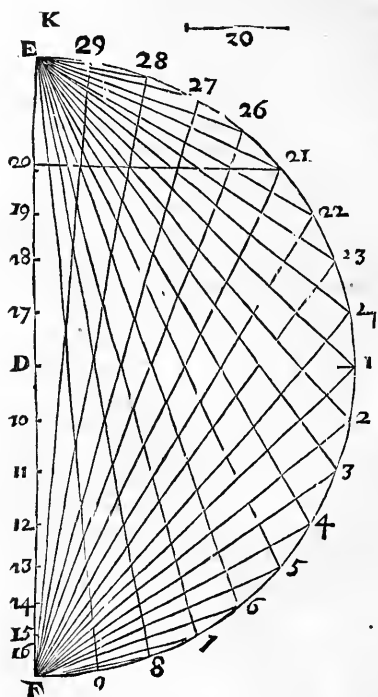
autant de fois, comme la figure K V Z E est au quart de la superficie du cylindre qui est ici représenté par le parallélogramme K V Y E.

Il faut passer plus avant, & considérer les perpendiculaires qui sont tirées du sommet sur les points 2, 3, 4, 5, &c. du cercle BDC. Or chacune de ces perpendiculaires, par exemple celle qui part du point 2, vaut la ligne qui tombe perpendiculairement sur le point N & la ligne N 2; la perpendiculaire qui tombe sur le point 3 vaut en puissance celle qui tombe perpendiculairement sur O, & la ligne O 3, & ainsi des autres. Ceci s'explique mieux dans le petit cercle A 9 T. Il faut donc concevoir la ligne qui part du point A centre du grand cercle BDC base du cylindre oblique, & qui va trouver le centre de l'autre cercle qui est la base supérieure du même cylindre, duquel centre on abaisse la perpendiculaire qui tombe sur la circonférence du petit cercle A 9 T au point T. Ayant trouvé le point T, de l'intervale AT comme diamètre je forme le cercle A 9 T; la demi-circonférence duquel est divisée en autant de parties égales qu'il y en a au quart BD de la circonférence du cercle BDC. Puis après, du point duquel j'ai tiré la perpendiculaire sur le point T, je tire des lignes aux points 11, 10, 9, 8, 7, &c. qui font la division du cercle, comme il a été dit. Du point T je tire des lignes aux mêmes points 11, 10, 9, 8, 7. Je dis d'avantage que le cercle A 9 T nous représente la base d'un cylindre droit qui a son autre base en l'air, sçavoir un cercle dont la circonférence passe par le point d'où est tiré la ligne qui tombe sur T, & est aussi le centre de la base supérieure du cylindre oblique, & on nommera ici ledit point qui est en l'air, sommet. Nous disons donc que la ligne tirée en l'air dudit sommet sur le point 7, est égale en puissance aux deux lignes dont l'une est celle

qui tombe perpendiculairement dudit sommet sur le point T ; & l'autre est T 7. La ligne qui part dudit sommet, & va au point 8, est égale en puissance à la susdite qui tombe dudit sommet sur T, & à T 8, & ainsi de toutes les lignes qui vont au point du cercle A 9 T. Or la ligne qui tombe sur le point T est toujours la même, & la hauteur perpendiculaire du cylindre oblique ; & toutes ces lignes qui partent dudit sommet, & vont sur les points 7, 8, 9, 10, 11, &c. forment un cône dont ledit point d'où sortent toutes ces lignes, & aussi celle qui tombe sur T, est le sommet ; & chacune desdites lignes qui vont dudit sommet sur 7, 8, 9, &c. sont chacune égales en puissance à ladite ligne qui tombe sur T, & à celle qui de T va sur le point de la circonférence A 9 T, auquel celle qui part du sommet aboutissoit aussi.

Or en tout ceci on doit considérer la figure du discours précédent, qui est ici décrite, en laquelle nous feignons que l'ouverture du compas se doit faire sur un cylindre droit posant un pied du compas pour pole sur le point F, & traçant de l'autre sur le cylindre, & faisant ladite ouverture plus grande que le diamètre FE : la pointe du compas va toucher la plus petite des perpendiculaires, laquelle partira du point E, & montera le long du cylindre, & les perpendiculaires suivantes qui partent des points 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23, &c. jusques au même point F, auquel lieu la perpendiculaire est égale à l'ouverture du compas, & partant la plus grande de toutes ces perpendiculaires. Or la ligne qui est l'ouverture du compas est égale en puissance à la ligne FE, & à la moindre perpendiculaire, sçavoir à celle qui va du point E le long du cylindre. Prenons maintenant quelqu'autre point comme 22. Nous disons que la ligne qui est l'ouverture du compas vaut les quarez de la ligne F 22, & de la perpendiculaire du point

22 en l'air; partant les quarez de FE & de la perpendiculaire sur E en l'air, sont égaux aux quarez F 22 &



de la perpendiculaire sur 22 en l'air. Au lieu du quarré FE, je prends les quarez de F 22, & de 22 E; partant les quarez de F 22, & de la perpendiculaire sur 22 en l'air, valent les quarez de F 22, 22 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air. Des deux grandeurs ôtez ce qui est commun, sçavoir le quarré de F 22, restera le quarré de la perpendiculaire sur 22 en l'air, égal aux quarez de 22 E & de la perpendiculaire sur E en l'air; & faisant le même aux autres

points 23, 24, 25, 26, 27, &c. on aura le quarré de la perpendiculaire sur 23, par exemple, égal aux quarez de 23 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air, & ainsi des autres: par ainsi nous trouvons que les quarez desdites

perpendiculaires en l'air sont égaux aux quarez de la perpendiculaire sur E en l'air, & des soutendantes 23 E, 22 E, 26 E, &c.

Or si on suppose que le cercle A 9 T soit aussi grand que F 22 E de la présente figure, & qu'ils soient tous deux également divisez, & que l'ouverture du compas vaille en puissance le diametre FE, & la hauteur du cylindre oblique, sçavoir la ligne qui tombe perpendiculairement sur T, alors les perpendiculaires bornées par le trait du compas, & tirées en l'air des points E 29, 28, 27, 26, &c. sont routes égales aux lignes qui tombent sur les points T, 11, 10, 9, 8, 7, A, & qui sont tirées du centre de la base supérieure du cylindre oblique, qui est le sommet d'où tombe perpendiculairement la ligne sur le point T, & cette ligne est la plus courte de toutes celles qui tombent dudit point sur le cercle A 9 T, & est égale à la perpendiculaire tirée sur le point E en l'air, & coupée par ladite ouverture du compas; la ligne qui aboutit au point 11, & vient du même sommet, est égale à la perpendiculaire sur le point 29 en l'air, & coupée par le compas; & ainsi toutes les lignes tirées du sommet, ou centre de la base supérieure du cylindre oblique sont égales aux perpendiculaires retranchées par le compas sur la surface du cylindre droit. Or les lignes ainsi tirées du centre oblique sur le cercle A 9 T sont égales aux lignes qui tombent sur les points 2, 3, 4, &c. & qui sont tirées de la circonférence de ladite base supérieure du cylindre oblique, sçavoir des points de ces perpendiculaires aux points F, N, O, P, &c. & les soutendantes T 7, T 8, T 9, &c. sont égales aux lignes N 2, O 3, P 4, &c. Nous disons donc que les parallelogrammes qui sont en même hauteur, & dont les bases sont égales, doivent être égaux, & contiennent des espaces égaux. Or pour mieux entendre cette égalité, nous de-

*Voyez la
Figure de la
page 312.*

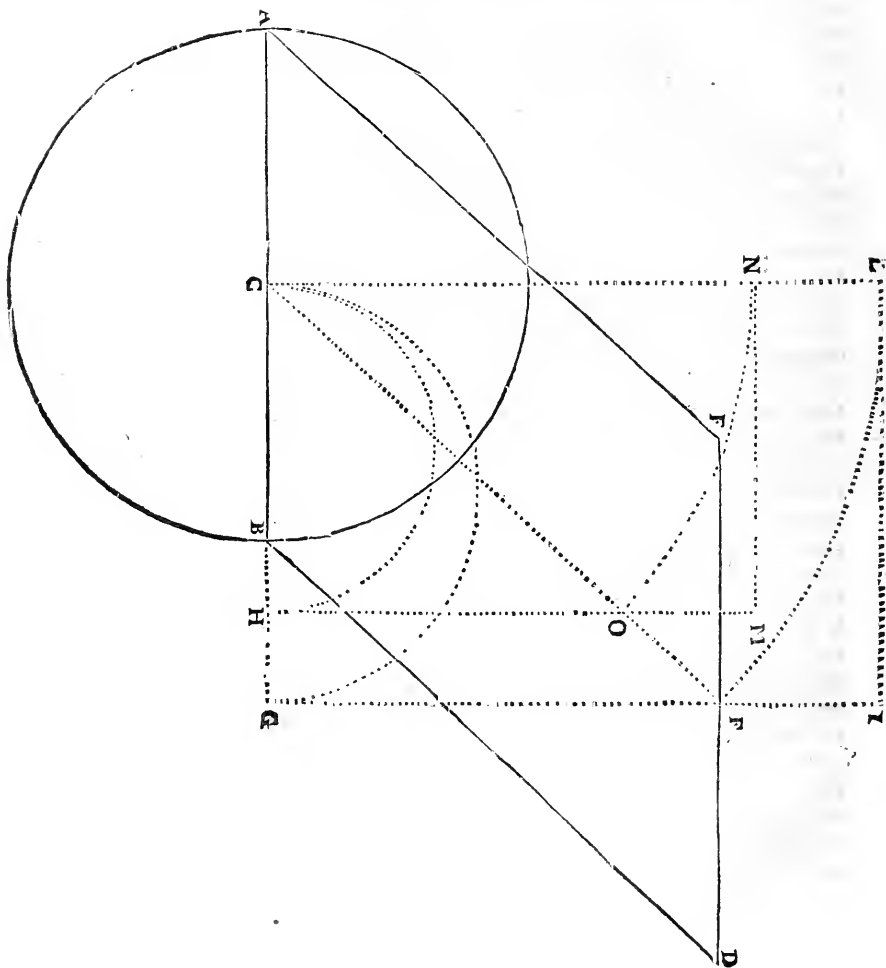
vous feindre que le cercle A 9 T va jusques au centre du cercle FPS 17, & que son diametre AT est égal à BA demi-diametre du cercle BDC; & ainsi le demi-cercle A 9 T fera égal au quart de cercle BD. Or le trait du compas qui s'est fait en la dernière figure F 22 E, se rapporte entièrement à ce qui s'est fait dans le cercle A 9 T de l'autre figure; & partant le trait du compas fait sur le cylindre droit est égal au quart de la circonférence du cylindre oblique.

Pour conclusion. Si le cercle de la dernière figure F 22 E est égal à celui de l'autre figure, sçavoir BDC, & que la perpendiculaire retranchée par le compas, & qui part du point E en l'air) quand le compas est plus ouvert que FE) est égale à la perpendiculaire tirée de la base supérieure du cylindre oblique à l'autre base, & qui est la vraie hauteur dudit cylindre oblique, & qu'on a supposé tomber de la base supérieure sur les points F, N, O, P, &c. & même sur C: toutes les perpendiculaires retranchées par le compas sur le cylindre droit dont la base est F 22 E seront égales aux perpendiculaires tirées du cercle supérieur du cylindre oblique sur les points B, 2, 3, 4, 5, &c. & la figure retranchée par le compas sera égal à la superficie du cylindre oblique duquel la base est le cercle BDC, & la hauteur perpendiculaire double de la perpendiculaire sur E en l'air, & retranchée par le compas, sçavoir de la perpendiculaire tant dessus que dessous ledit point E.

Que la ligne C G soit le diametre d'un cercle qui serve de base à un cylindre droit duquel on ait retranché une superficie; A C B soit le diametre d'un cercle qui soit la base d'un cylindre oblique proposé; C F soit l'axe dudit cylindre oblique; F le centre de la base supérieure, duquel tirant la ligne F G perpendiculaire sur A B, ladite F G sera la hauteur du cylindre

Voyez la
Figure suivante.

cylindre oblique. Mais si on éleve ledit axe CF perpendiculairement sur C, on aura son égale CL qui est la hauteur qu'il faut donner au cylindre droit qui a la ligne CG pour diamètre de sa base; & si on tire de L en I une parallèle à CG, & du point I la ligne IFG, le cylindre droit est achevé, sur lequel du point C, & intervalle CL, on retranchera avec le compas la superficie LF, &c. Or nous avons vû ci-devant que ce qui est retranché sur la superficie du cylindre droit CLIG, est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diamètre du cylindre droit CG, sçavoir de sa base au demi-diamètre de la base du cylindre oblique AC ou CB. Or si le diamètre du cylindre droit est égal au demi-diamètre de l'oblique, alors ce qui est retranché du cylindre droit sera égal à la superficie du cylindre oblique. Mais l'un n'étant pas égal à l'autre, pour trouver un retranchement qui soit égal à la superficie du cylindre oblique, il est nécessaire de trouver un cylindre droit semblable au premier CLIG, comme est CNMH. Pour le trouver, on prend une moyenne proportionnelle entre CB, & CG, laquelle est CH: du point H j'éleve la perpendiculaire HOM qui coupe la ligne CF en O, & fait le triangle CHO semblable au triangle CGF: ces triangles semblables servent à faire le petit cylindre droit semblable au grand cylindre droit; car du petit cylindre CNMH, on retranche NEO, &c. & ce qui est retranché est égal à la superficie du cylindre oblique proposé; car le retranché LF du cylindre droit CLIG est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diamètre CG au demi-diamètre CB. Mais le petit cylindre CNMH étant semblable au grand cylindre CLIG, le retranché de l'un sera semblable au retranché de l'autre: les superficies des cylindres sont entr'elles en raison doublée de leurs diamètres;

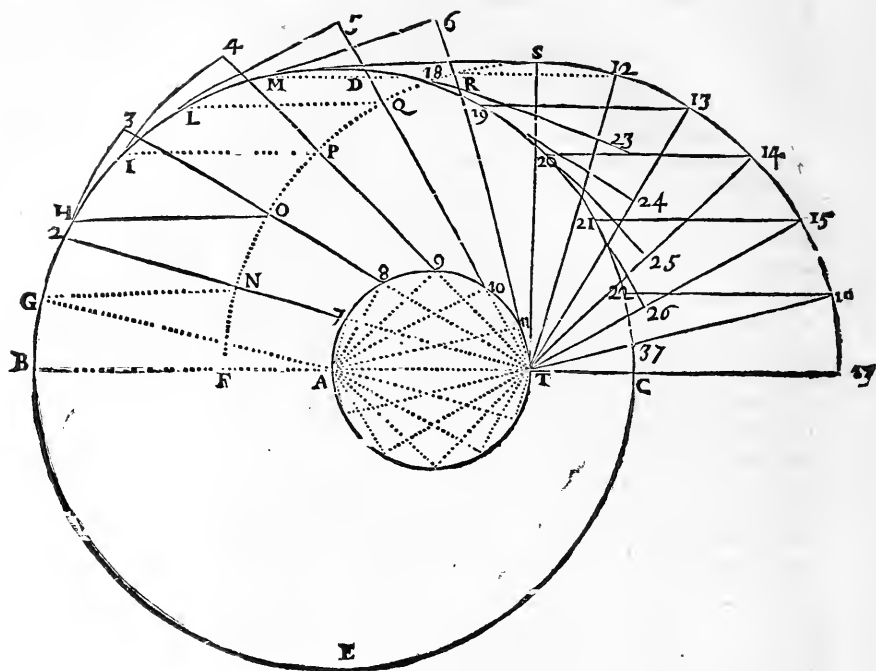


partant la superficie du grand cylindre est à celle du petit en raison doublée de CG diamètre du cercle du grand cylindre à CH diamètre du cercle du petit ; la superficie de l'un fera donc à celle de l'autre en raison doublée de CG à CH, c'est-à-dire, comme CG à CB. Mais les cylindres droits étant semblables, le retranché de l'un fera au retranché de l'autre, comme toute la superficie de l'un à toute la superficie de l'autre ; partant le tranché du cylindre droit CLF est au retranché du petit cylindre droit CNEO, comme CG à CB. Mais le retranché du grand cylindre droit est à la superficie du cylindre oblique, comme CG à CB ; partant le retranché du petit cylindre est égal à la superficie du cylindre oblique, puis que l'un & l'autre a même raison au retranché du grand cylindre.

Tout ce qui a été dit ci-devant pour couper sur un cylindre un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique, se peut réduire à ce qui s'ensuit.

Soit fait la figure suivante dans laquelle le diamètre du petit cercle, sçavoir AT, doit être égal au demi-diamètre du grand cercle BDC base inférieure, & de FPS 17 représentant la base supérieure en l'air du cylindre oblique dont le centre est perpendiculaire sur T joint au point C. Je dis que si on ouvre le compas autant que le côté du cylindre oblique, & que laissant un des pieds du compas sur le point F joint au point A, on trace une ligne sur le cylindre droit dont la base est A 9 T, l'espace compris entre ladite ligne, & ladite base A 9 T, sera égal à la superficie du cylindre oblique.

Soient divisées les bases desdits cylindres oblique & droit en une infinité de parties égales, sçavoir, faisant autant de divisions sur le quart de cercle BLD que sur le demi-cercle A 9 T, & ce, tant aux bases supérieures qu'aux inférieures desdits cylindres ; & tirant des lignes



par les points desdites divisions, on fera plusieurs parallelogrammes qu'on prendra au cylindre oblique d'une base à l'autre; mais au cylindre droit on les prendra depuis la base inférieure jusques à la section faite par le compas. Or lesdits parallelogrammes sont égaux en multitude en l'un & l'autre cylindre, & on les démontrera aussi égaux en quantité, comme il s'ensuit.

Puisque les parallelogrammes susdits ont même base, puisqu'ils contiennent égale portion ou quantité en la circonférence de la base de chacun des cylindres, reste à montrer que leur hauteur est égale. Cette hauteur est facile à connoître au cylindre droit. puisque le côté même du cylindre coupé par le compas, la dénote; mais au cylindre oblique cette hauteur est la ligne tirée de la base supérieure représentée par les points N, O, P, &c. perpendiculairement sur la tangente tirée du point correspondant en la base inférieure; ainsi la ligne tirée de N en l'air sur la touchante G 2 (qui part du point G de la base inférieure correspondant au point N de la supérieure) enforte qu'il se fasse un angle droit au point 2, est la hauteur du parallelogramme tiré de G au point N en l'air de la base supérieure. Et de même, la hauteur du parallelogramme tiré du point H au point qui est au-dessus de O en l'air en la base supérieure, est la ligne tirée du même point O en l'air au point 3 sur la touchante H 3 où elles font ensemble un angle droit; & ainsi les hauteurs de tous les parallelogrammes sont les lignes tirées des points de la base supérieure perpendiculairement sur les tangentes qui partent des points correspondans en la base inférieure; & ainsi, le moindre de tous les parallelogrammes sera celui qui du point D de la base inférieure, est tiré au point correspondant à S en la supérieure; car il n'a pour hauteur simplement que la hauteur du cylindre oblique, sçavoir les tirées perpendiculairement des points C, F, N, O, &c. à la base supérieure. Comme le plus grand desdits parallelogrammes est celui qui de B est tiré vers F en l'air; car sa hauteur est le côté entier du cylindre oblique: il reste à démontrer que ces perpendiculaires sont égales en l'un & en l'autre cylindre.

Premièrement, il est certain que l'ouverture du com-

pas, qui fait le retranchement sur le cylindre droit, étant égale au côté du cylindre oblique, la perpendiculaire sur A au cylindre droit, bornée par le trait du compas, fera égale à celle qui va du point B au point correspondant de la base supérieure du cylindre oblique, qui est aussi le côté du cylindre oblique. Et pareillement la perpendiculaire sur le point T au cylindre droit est égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la ligne tirée perpendiculairement du point S à sa base supérieure; car l'axe du cylindre oblique qui du centre A de la base inférieure va à celui de la supérieure qui est au-dessus de T, est égal au côté du cylindre oblique, & partant à l'ouverture du compas: mais ledit point T en l'air, centre de la base supérieure, est le point du cylindre droit retranché par le compas; partant ladite perpendiculaire sur T au cylindre droit, fera égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la perpendiculaire sur S.

On le démontreroit encore autrement, imaginant un triangle rectangle dont un des côtes soit DS; le second, la perpendiculaire qui va de S à la base supérieure; & le troisième qui va de D audit point sur S en l'air; car ce triangle est entièrement égal à celui qui se fait au dedans du cylindre droit dont un des côtes est AT; l'autre, la perpendiculaire sur T jusques au retranchement; & le troisième est l'ouverture du compas, qui va de A à T en l'air, & est égale au côté du cylindre oblique, sçavoir à la ligne qui va de D au point S en l'air: la ligne AT est égal à DS, comme il est aisé de le montrer; les angles en T & en S sont droits; & partant les triangles sont égaux, & la ligne sur T égale à la ligne sur S.

On montrera, comme ci-devant, l'égalité des autres perpendiculaires; sçavoir, celle sur 7 au cylindre droit,

à celle qui tombe sur 2 à l'oblique; celle sur 8, à celle sur 3, &c. & nous le répéterons encore ici. L'ouverture du compas est égale en puissance aux quarréz de AT & de la perpendiculaire sur T du cylindre droit; & pareillement elle est égale aux quarréz de A 7 & de la perpendiculaire sur 7, & aux quarréz de A 8 & de la perpendiculaire sur 8, &c. Donc les quarréz de AT & de la perpendiculaire sur T sont égaux aux quarréz de A 7 & de la perpendiculaire sur 7; & si au lieu du quarré AT on prend les quarréz de A 7 & 7 T qui lui sont égaux, on aura les quarréz de 7 T, 7 A, & de la perpendiculaire sur T égaux aux quarréz de 7 A, & de la perpendiculaire sur 7; & ôtant de part & d'autre le quarré 7 A, on aura le quarré de la perpendiculaire sur 7 égal aux quarréz de 7 T, & de la perpendiculaire sur T.

De plus, on a montré que 2 N est égal à 7 T par le moyen du rectangle 7 A G 2. Il faudra donc pour la perpendiculaire sur 2 imaginer un triangle rectangle en l'air sur le point N dont un des côtez sera N 2; le second, la perpendiculaire qui du point N va trouver le point correspondant en la base supérieure du cylindre oblique; & le troisième est la perpendiculaire cherchée, qui du point N en l'air est menée au point 2, & ce troisième côté étant opposé à l'angle droit en N, vaut en puissance les quarréz de la perpendiculaire sur N (égal à celui de la perpendiculaire sur T) & de la ligne N 2 égale à 7 T; donc la perpendiculaire sur 7 sera égal à la ligne qui du point N en l'air tombe sur 2. Mais ces lignes désignent la hauteur des parallelogrammes faits sur les cylindres, & partant lesdits parallelogrammes ayant la base égale & la hauteur égale sont égaux; & partant la surface du cylindre oblique égale à ce qui est coupé du cylindre droit. Mais si la perpendiculaire

tirée du centre de la base supérieure ne tombe pas sur la circonférence de la base inférieure, en sorte que AT ne soit pas égal au demi-diamètre de ladite base, alors il faut proportionner, comme on a montré au discours sur la page 322.

DU SOLIDE DE LA ROULETTE.

QUE AIB soit le chemin de la Roulette; $ALMB$ le parallélogramme fait du diamètre IC , & de la circonférence AB étendue en ligne droite. Nous cherchons la raison qu'il y a du cylindre fait par le parallélogramme, au solide fait par la Roulette AIB , lorsque le tout tourne sur ladite circonférence ACB . Pour cet effet, je tire la ligne GDH parallèle à ACB ; & cette ligne se prend pour le chemin du point D centre de la Roulette. Or cette ligne GDH coupe la figure AOI_4 & le demi-cercle CEI , chacune en deux parties semblables: or il y a un Théorème qui porte que, quand deux figures sont ainsi coupées par une ligne parallèle à la ligne sur laquelle les figures font leur tour, les solides des figures sont entr'eux comme les figures; & partant le solide fait par la figure AOI_4 est égal au solide fait par la demi-circonférence IEC ; car nous avons vu comme le plan AOI_4 est égal au demi-cercle IEC que nous avons trouvé être le quart du parallélogramme; ainsi ces solides seront chacun le quart du cylindre fait par le parallélogramme. Mais ne prenant que le seul solide fait par AOI_4 qui fera le quart du cylindre, & ayant tiré la ligne QRS qui représente toutes les lignes tirées perpendiculairement de AN premier quart de la circonférence ACB sur GDH , & la ligne VXY qui représente toutes les lignes tirées de NC second quart, sur la ligne courbe OYI : nous disons que le carré de QR est égal
aux

courbe AOI pris aussi autant de fois. Or lesdites lignes SR, XY, &c. sont des sinus droits dont les quarrés sont au quarré du diamètre pris autant de fois, comme 1 à 8, & les quarrés du demi-diamètre sont aux quarrés du diamètre, comme 2 à 8. Si on joint ces raisons, on aura celle de 3 à 8 qui est celle des quarrés des lignes tirées de AC sur la ligne courbe AOI au quarré du diamètre pris autant de fois; & si on y joint la raison de la figure AOI 4 au parallélogramme AI, qui est comme 2 à 8, on aura la raison de 5 à 8, qui est celle du solide que fait la Roulette AIB, au cylindre AM, le tout tournant sur ACB.

On conclura la même chose en considérant les quarrés des sinus versés QR, VY, & les autres, lesquels sont au quarré du diamètre pris autant de fois, comme 3 à 8; & l'espace ARI 4 est au parallélogramme AI, comme 2 à 8, qui joint avec la raison de 3 à 8, font celle de 5 à 8; & telle est la raison du solide de la Roulette au cylindre, comme en l'autre conclusion.

Maintenant il faut voir quelle raison il y aura entre le solide de la même Roulette & son cylindre, lorsqu'elle tourne sur LM parallèle à AB, où il faut considérer que le quarré de N 8 vaut les quarrés de NP & P 8 moins deux fois le rectangle NP 8; & ainsi le quarré N 8 plus deux fois le rectangle NP 8 est égal aux quarrés NP, P 8. On sçait que les quarrés de N 8, VK, & de toutes les autres sont au quarré du diamètre CI ou NP son égal pris autant de fois, comme 5 à 8, à quoy il faut joindre deux fois les rectangles NP 8, VZK, & tous les autres: or ces rectangles ont tous pour hauteur NP, & partant ils seront entr'eux comme toutes les lignes P 8; ZK, 9 10, & les autres. Mais tout l'espace rempli de ces lignes, ou plutôt toutes ces lignes sont au diamètre pris autant de fois, comme 2 à 8: & il faut prendre deux fois ces rectangles; partant ils seront au quarré du dia-

metre pris autant de fois, qu'il y a de lignes VK, N 8, Q 10, &c. comme 4 à 8; laquelle raison jointe à celle de 5 à 8 ci-devant, font celle de 9 à 8, ou $\frac{9}{8}$; & parce que les quarrez Q 9, NP, VZ, &c. représentent les 8, il s'ensuivra que les quarrez 9 10, P 8, ZK, &c. vaudront $\frac{1}{8}$; car puisque les quarrez Q 10, N 8, VK, &c. avec deux fois les rectangles Q 9 10, NP 8, VZ K, &c. (qui tous ensemble avec lesdits quarrez valent $\frac{2}{8}$) sont égaux aux quarrez Q 9, 9 10, NP, P 8, VZ, ZK, &c. ceux-ci valent aussi $\frac{2}{8}$. Si donc on en ôte les quarrez Q 9, NP, VZ, qui valent $\frac{8}{8}$, restera $\frac{1}{8}$ pour les quarrez 9 10, P 8, ZK, qui ôtez encore des mêmes quarrez Q 9, NP, VZ, restera $\frac{7}{8}$ pour le solide de la Roulette, qui sera au cylindre comme 7 à 8.

La même chose se peut conclure d'une autre façon, en disant que le carré P 8 est égal aux deux quarrez PN, N 8 moins deux fois le rectangle PN 8, & tous les autres de même, sçavoir le carré de ZK égal aux quarrez de ZV, & KV moins deux fois le rectangle ZVK, & ainsi des autres. On a vû que les quarrez de N 8 & les autres, sont au carré du diamètre pris autant de fois, comme 5 à 8; & joignant le carré de NP qui est 8, avec 5, on aura la raison de 13 à 8. De cette somme il faut ôter le moins, sçavoir les rectangles PN 8 & autres, tous lesquels ont même hauteur, sçavoir PN; ils seront donc entr'eux comme leurs bases VK, N 8, Q 10, & les autres. L'espace A 8 I D C rempli par les petites lignes VK, N 8, &c. est au grand parallélogramme AI, comme 6 à 8; & le rectangle pris deux fois sera audit parallélogramme, comme 12 à 8; & ôtant la raison de 12 à 8 de celle de 13 à 8, restera celle de 1 à 8, comme ci-devant pour la valeur des quarrez ZK, P 8, 9 10, & les autres.

Il faut maintenant considérer les solides qui se font

quand la figure tourne sur LA, où on remarquera que la ligne IC parallèle à ladite LA, coupe le parallélogramme AM & la figure AIB en deux également; & partant les solides sont entr'eux comme les plans; & ainsi le solide fait par AIB sera au cylindre formé par le parallélogramme AM, comme le plan de l'un est au plan de l'autre. Mais les plans sont entr'eux comme 4 à 3; partant le cylindre sera au solide de la Roulette comme 4 à 3.

Considérons maintenant le solide fait par le plan de la compagne de la Roulette AOITB. On voit que la ligne IC coupe en deux également tant le parallélogramme AM, que ladite figure AOITB; partant les solides seront entr'eux comme les plans: mais les plans sont entr'eux comme 2 à 1, partant le cylindre sera au solide fait par AOITB, comme 2 à 1, c'est-à-dire double.

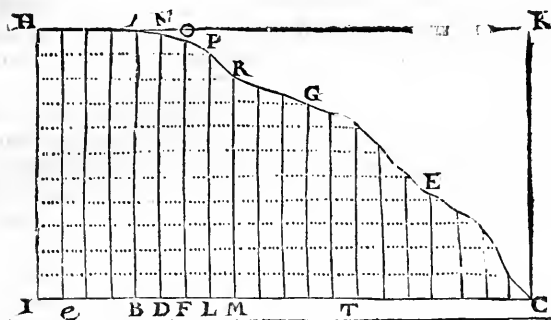
On conclura de là que le solide fait par la figure AOI 10 est au cylindre AI, comme 1 à 4; car puisque le solide fait par ASIDC est au cylindre AI comme 3 à 4: si on en ôte le solide fait par AOIDC qui est au même cylindre AI comme 2 à 4, restera la raison de 1 à 4, pour celle du solide fait par AOI 10, au même cylindre AI.

PROPORTION DES SOLIDES

composez de lignes courbes, avec le cylindre qui aura même base & même hauteur, ensemble de leur centre de gravité.

QUE AGECE soit une ligne irrégulière telle qu'on voudra, pourvu toutefois qu'elle baïsse toujours vers C; & soient tirées les lignes AB, BC, qui fassent un angle en B, lequel soit ici supposé être droit, car cela

n'est pas nécessaire, & on aura le triline ABC. Que les lignes AB, BC soient divisées en une infinité de parties égales, & chaque partie de AB soit égal à chaque partie de BC : de chaque point de la division soient ti-



rées des paralleles aux lignes AB, BC, qui divisent le triline, comme on voit ici. Du point C j'éleve en l'air une perpendiculaire au plan ABC égale à BC; puis je conçois un plan sur la ligne AB, tellement incliné, qu'il vienne rencontrer l'extrémité de la perpendiculaire sur C en l'air. Ensuite j'éleve de chaque point de la ligne BC une perpendiculaire qui rencontre ce plan incliné, & chacune de ces perpendiculaires est égale à sa correspondante, sçavoir à celle qui va du point dont elle a été tirée jusques à la ligne AB : comme la perpendiculaire tirée sur D sera égale à BD, celle qui est élevée sur F est égale à BF, & ainsi des autres. Il faut aussi concevoir un triangle rectangle isocelle qui se fait par la ligne BC, la perpendiculaire en l'air sur C qui est égale à BC, & la ligne qui va de B à l'extrémité de ladite per-

pendiculaire : le plan de ce triangle est égal à la moitié du quarré BC ; le même doit être entendu de tous les triangle qui se font par le moyen du plan incliné, qui tous sont égaux à la moitié du quarré de leurs côtez égaux.

Il faut ensuite considérer une perpendiculaire élevée sur le point A qui chemine sur la ligne AGE C, & qui rencontre le plan incliné : cette ligne par son chemin décrit une superficie ; & par conséquent on a quatre superficies qui enferment un solide, la première est le plan du trilogne ACB ; la deuxième, le plan incliné qui commence à AB ; la troisième est le triangle sur BC en l'air & perpendiculaire sur le plan ABC ; la quatrième est celle que fait la perpendiculaire en parcourant la ligne AGE C. Ce solide est distingué & comme composé d'une infinité de triangles tous parallèles & semblables à celui qui est élevé perpendiculairement sur BC, & qui est une des faces du solide ; partant ce solide partagé de cette sorte est formé de la moitié de tous les quarréz de la ligne BC, & de ses parallèles.

Que si on veut couper ce solide d'un autre sens, sçavoir par des plans parallèles à la ligne AB, alors on fera dans le solide des parallelogrammes égaux aux parallelogrammes BDN, BFO, BLP &c. partant tous ces parallelogrammes ensemble seront égaux aux demi-quarrez de la ligne BC & de ses parallèles ; car c'est le même solide qui ne change point. On peut donc établir, que tous les demi-quarrez de la ligne BC & de ses parallèles, sont égaux à tous les parallelogrammes NDB, OFB, PLB &c.

Soit tiré une parallèle à AB en quelque part qu'on voudra : que ce soit HI, sçavoir hors de la figure, & soit achevé le parallelogramme HICK, & soit élevé un plan sur la ligne HI, incliné en telle sorte ; qu'il ren-

contre comme le précédent, l'extrémité de la perpendiculaire sur C en l'air prise de la longueur de IC; & soit aussi prolongé les lignes de la figure jusques à la ligne HI: on trouvera que les demi-quarrez de la ligne IC & des autres paralleles à cette ligne, qui aboutissent à HI sont égaux à tous les parallelogrammes compris dans la figure ABC, en les prolongeant jusques à HI, & dans l'espace HIBA, sçavoir ABI, NDI, OFI, &c.

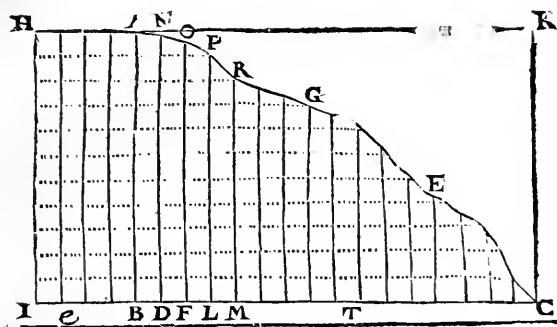
Nous considérerons maintenant la figure quand elle tourne sur HI. Alors elle forme trois solides, sçavoir un cylindre par HIBA; un solide qui se nomme creux par la figure ACB; un autre par HACBI; & le grand cylindre HICK. Nous cherchons les raisons de ces solides entr'eux. Pour le petit cylindre, il est au grand cylindre comme le quarré de HA est au quarré de HK; le solide fait de HIBCA est au grand cylindre, comme le quarré de IC & des autres paralleles jusques à HA, sont au quarré de HK pris autant de fois; le solide de la figure ABC est au grand cylindre comme le quarré de IC & des autres paralleles moins le quarré IB, pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois: & si on prend la moitié du solide, elle fera au grand cylindre, comme la moitié des quarrez IC, & des autres moins la moitié du quarré IB pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois. Au lieu des demi-quarrez je prends ce qui leur est égal, sçavoir tous les parallelogrammes moins les petits de la figure HABI, & ils seront au grand quarré HK pris autant de fois, comme la moitié du solide de la figure est au grand cylindre. Que si on fait tourner la figure ABC sur AB, alors la moitié du solide fait par ABC sera au cylindre fait par ABCK, comme la moitié des quarrez de BC & de ses paralleles, sont au quarré de BC pris autant de fois; & en general, sur quelque ligne qu'on fasse

tourner la figure, pourvû qu'elle soit parallele à AB, on aura toujours la même équation; sçavoir, que la moitié du solide fait par la figure, sera à son cylindre, comme la moitié des quarréz compris dans la figure, sera au grand quarré pris autant de fois. J'entens que la figure commence à la ligne sur laquelle elle tourne, & que le parallelogramme commence à la même ligne.

Tout cela posé je viens à chercher le centre de gravité du plan de la figure ABC. Pour cet effet je suppose que la ligne BC est un levier dont le point B est l'appui & en C la puissance : tous les points sont les lieux sur lesquels les pesanteurs pesent; on nommera ces points centres de gravité de chaque portion de la figure, laquelle se divise en parallelogrammes qui tous ont chacun leur centre, sçavoir le point sur lequel chacun d'eux pese; & tous ces centres ensemble viennent à être égaux (eu égard à la pesanteur qu'ils supportent) au centre total de la figure. Or nous disons que le premier point, sçavoir D, est le centre de gravité du premier parallelogramme; F, du second parallelogramme; L, du troisième &c. Les centres de gravité sont entr'eux en raison composée des côtez de leurs figures; par exemple, le centre D est au centre F en raison composée de celle de ND à FO, & de celle de BD à BF; ce qui veut dire que comme le rectangle ou parallelogramme des antécédens est à celui des conséquens, sçavoir comme le parallelogramme NDB est au parallelogramme OFB: ainsi toutes les pesanteurs sur tous lesdits points ou centres de gravité sont entr'elles comme tous les parallelogrammes sont entr'eux. Au lieu des parallelogrammes je prens leurs hauteurs, sçavoir les lignes AB, ND, OF, & je pose chacune de ces lignes pour le fardeau étendu, & qui pese sur chacun de ces points. Pour trouver le centre de gravité de la figure, sçavoir le point sur la ligne

BC

BC où les parties sont contrepesées les unes aux autres, je feins par l'analize qu'il est en M, & j'attache à ce point M un poids égal à tous les autres ci-dessus représentées par toutes les lignes qui sont sur les points. Ce poids



est donc une ligne égale à toutes les lignes ci-dessus, & je dis ainsi : Toutes les pesanteurs, ou centres de gravité ensemble sont au poids de toute la figure qui est en M, comme tous les parallelogrammes de la figure sont au grand parallelogramme qui a un côté égal à toutes les lignes ci-dessus, & la ligne BM pour l'autre côté (car on prend ici les parallelogrammes qui étant perpendiculaires sur les lignes ND, OF, PL, &c. vont rencontrer le plan qui part de la ligne AB, & en montant va rencontrer le point sur C en l'air élevé à la hauteur de CB, comme il a été dit ci-devant.) Mais toutes les pesanteurs assemblées sont égales à la pesanteur qui est en M; partant tous les parallelogrammes de la figure sont égaux au parallelogramme qui a toutes les lignes BA, DN, FO, &c. pour un de ses côtez, & BM

pour l'autre : étant égaux ils auront même raison à une autre grandeur ; c'est pourquoi tous les rectangles sont au grand carré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle qui a toutes les lignes susdites AB, ND, OF, &c. pour un de ses côtez, & BM, pour l'autre, est au même carré pris comme ci-devant.

Au lieu de tous les rectangles susdits je prens ce qui leur est égal, sçavoir les demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, BM, BC, &c. ils seront donc au grand carré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle susdit qui a BM pour un de ses côtez, & pour l'autre toutes les lignes AB, ND, OF, &c. est audit carré BC pris &c. Mais nous avons vû que comme le cylindre fait par ABCK est à la moitié du solide fait quand la figure tourne sur AB, ainsi le carré BC pris autant de fois, est aux demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, &c. Donc le rectangle qui a les lignes AB, ND, OF, &c. pour un de ses côtez, & BM pour l'autre, est au carré BC pris autant de fois, comme la moitié du solide fait par ABC est au cylindre. Par les indivisibles je fais des solides de tous ces plans, & je dis que la moitié du solide fait par ABC est au cylindre fait par ABCK, comme le solide qui a pour base la figure ABC, & BM pour hauteur, est au solide qui a pour base le parallelogramme ABCK, & BC pour hauteur. Or les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur ; partant la moitié du solide de ABC, & le cylindre du parallelogramme ABCK, sont la raison composante des deux solides, qui sont entr'eux en la raison composée du parallelogramme ABCK à la figure ABC, & de celle de la ligne BC, à BM. Nous connoissons la raison composante, c'est-à-dire de la moitié du solide au cylindre ; car (si c'est une parabole) son solide est à son cylindre comme 8 à 15 : ici nous n'avons que la moitié du soli-

de; c'est pourquoy ce sera comme 4 à 15. Pareillement la raison du plan de la parabole à son parallelogramme est connue, qui est comme 2 à 3, ôtant donc de 4 à 15 la raison de 2 à 3 on de 4 à 6, il reste celle de 6 à 15; & telle est la raison de BM à BC, & le point M est le centre.

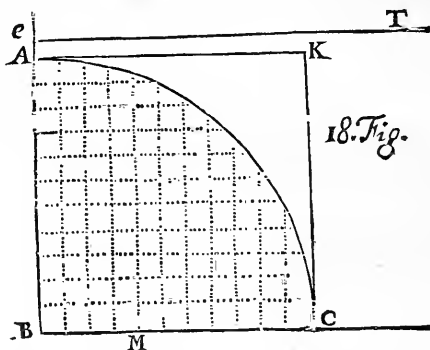
Que si nous feignons un cylindre tel qu'il soit la moitié d'un solide, & que nous disions : Comme le cylindre est à la moitié du solide, ainsi quelque ligne, comme eT est à ligne BM; & comme le parallelogramme ABCK est au plan ABC, ainsi la même ligne eT est à la ligne BC: ces trois lignes composent la raison qui est entre la moitié du solide & le cylindre, qui sera la raison composée de eT à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M sera le centre de gravité.

Auparavant que de proceder selon cette dernière façon il faut avoir trouvé cette ligne eT , faisant que, comme le plan ABC est au parallelogramme ABCK, ainsi la ligne BC soit à eT ; & puis dire : Comme le cylindre fait par ABCK est à la moitié du solide fait par ABC tournant sur AB, ainsi la ligne eT soit à BM : le point M marque le centre de gravité. Cette méthode est pour agir plus élégamment, & plus brièvement que par la première qui est plus sûre, sçavoir par la composition de raison des deux solides qui sont entr'eux en la raison composée de celle de leur base, & de celle de leur hauteur, comme il a été dit ci-devant.

Il nous faut maintenant chercher le centre de gravité d'un quart de cercle par le solide qui se fait quand un quart de cercle qui partiroit du point A & viendrait en C, puis après du point C l'autre quart de cercle viendrait rencontrer la ligne AB prolongée tant que de besoin. Quand ce quart de cercle tourne sur AB, il se fait un solide de ce quart, & il se fait un cylindre du

Voyez la
Figure suivante.

parallelogramme ABCK, lequel, en cette figure, est un quarré; car AB est égale à BC, & chacune est le demi-diametre du cercle. Je trouve premierement le centre de gravité, sçavoir, le point M, en la façon ordinaire, sçavoir, que le demi - solide du quart de cercle, est à son cylindre comme le solide qui a pour base le quart de cercle, & pour hauteur la ligne BM, est



au solide qui est composé du quarré BC pris autant de fois qu'il y a de divisions en BC. Mais les solides sont entr'eux en la raison composée de celle de leur hauteur, & de celle de leur base, sçavoir comme le quart de cercle, au quarré BC, & comme la ligne BM, à BC; en telle sorte que ces quatre termes composent la raison de la moitié du solide fait par le quart de cercle, à son cylindre, laquelle est connue; car le cylindre est au solide comme 6 à 4; mais ici il n'y a que la moitié, & partant la raison sera comme 6 à 2. La raison du plan au plan, & de la ligne à la ligne, sera donc comme 2 à 6; la raison du plan au plan est connue; car en cette figure, selon Archimède, elle est comme 11 à 14. Si

donc je soustrais la raison de 11 à 14, de celle de 2 à 6, ou de 11 à 33, il restera la raison de 14 à 33 pour celle des lignes BM à BC; & le point M vient à être le lieu du centre de gravité, en la première manière.

La deuxième façon est en disant : Comme le cylindre de ABCK est à la moitié du solide du quart de cercle, ainsi la ligne eT est à BM; (on trouvera la ligne eT comme ci-devant, sçavoir en faisant comme le plan du quart de cercle est au parallélogramme, ainsi la ligne BC est à eT) c'est pourquoi nous voyons que la moitié du solide est à son cylindre, en la raison composée de eT à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M est encore le centre de gravité, selon la seconde méthode.

La troisième méthode est la plus subtile, & elle est telle : comme le quart & demi de la circonférence, sçavoir AC & sa moitié, le tout pris comme ligne droite, est à BC demi-diamètre, ainsi BC est au tiers de la ligne eT trouvée comme ci-dessus; & il se trouvera que BM fera le tiers de ladite eT ; & ainsi le point M sera le centre de gravité. Il faut montrer que BM est le tiers de eT ; de plus que le quart, & demi de la circonférence est à son demi-diamètre, comme le même demi-diamètre est à BM tiers de eT .

Pour le premier, il est aisé à voir; car faisant que comme la moitié du solide est au cylindre, ou bien comme le cylindre fait par ABCK, est à la moitié du solide fait par le quart de cercle, ainsi la ligne eT soit à BM. Nous sçavons que le cylindre est triple de la moitié du solide; partant la ligne eT sera triple de BM, ce qu'il falloit prouver.

Il faut maintenant prouver que les trois lignes, sçavoir le quart & demi de la circonférence pris comme ligne droite, le demi-diamètre & le tiers de eT sont proportionnelles. Ceci se démontre par la proportion.

Vu ii)

troublée que je dispose comme il s'ensuit. Que le quart & demi de la circonférence soit a ; le demi-quart de la même circonférence soit b ; le demi-diametre soit c ; le même demi-diametre soit aussi d ; la ligne eT soit e ; & le tiers de la ligne eT ou la ligne BM , soit m . On fera les proportions suivantes.

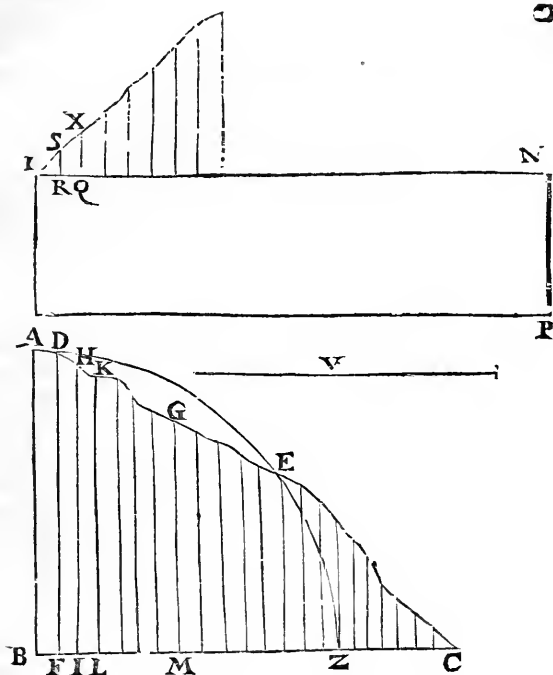
Comme a est à b , ainsi e est à m ; & comme b est à c , ainsi d est à e ; partant comme a est à c , ainsi d est à m ; partant les trois lignes a, c, m sont proportionnelles, ce qui restoit à démontrer.

Tout ce qui a été dit jusques à présent ne sert que pour trouver le centre de gravité des plans par le moyen d'un solide. Maintenant nous chercherons le centre de gravité d'une ligne telle qu'elle puisse être, soit droite, circulaire, ou irrégulière.

TROUVER LE CENTRE DE GRAVITE' de la ligne AGE C.

SOIT divisé la ligne AGE C en une infinité de parties égales ; & ayant tiré les lignes AB, BC, comme ci-devant, soit aussi tiré des paralleles à AB de chaque point de la division, qui diviseront la ligne BC en parties inégales. Les parties de la ligne AGC ont chacune leur pesanteur ; & le poids d'une partie n'est pas égal au poids de l'autre. Or le poids de chaque portion est représenté par le point de sa division : les paralleles portent chaque pesanteur sur le levier BC aux points de sa division ; & c'est sur ces points de BC que pesent toutes les parties de la ligne AGC. Nous sçavons que les poids sont entr'eux comme les rectangles ; c'est-à-dire que le poids du point D est au poids du point H, comme le rectangle fait de AD & de BF, au rectangle fait de AD ou son égale DH, & de BI. Au lieu de dire,

comme les rectangles, je dis, comme la ligne BF est à BI, parce que les rectangles ont tous un côté égal, sçavoir la portion de la ligne AGC. Je feins que le cen-



tre soit en M, duquel point je fais pendre une ligne égale à AGC qui représente sa pesanteur ; puis je dis que le poids du point F est au poids du point M centre, comme la ligne BF est à la ligne BM ; le poids du point I est au

poids de M, comme la ligne BI à BM, & ainsi des autres. De là nous reviendrons aux rectangles, & nous dirons que tous les points pesans sur ceux de la ligne BC sont au poids universel pesant sur le point M centre total, comme le rectangle fait d'une seule portion de la ligne AGC & de toutes les lignes BF, BI, BL, BM, &c. est au rectangle fait par la ligne AGC pendue au point M, & par la ligne BM. Or tous les petits poids ramassez ensemble sont égaux au poids en M, qui est le poids de toute la ligne; & partant les deux rectangles sont égaux, & leurs côtes sont quatre lignes proportionnelles. Pour faciliter la résolution de la question du rectangle fait par une portion de la ligne AGC & des lignes BF, BI, BL, &c. j'ôte par les indivisibles la portion de la ligne AGC : cette portion étant une & terminée, ne diminue rien dans l'infini; (car tout ce qui est fini & terminé comme 1, 2, 3, 4, & tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ni ne diminue rien dans les infinis) ayant donc retiré cette unique portion du rectangle, il me reste l'espace compris par les lignes BF, BI, BL, &c. qui est égal au même rectangle de AGC par BM. Je pose que la ligne AGC soit la droite TN, laquelle étant divisée infiniment, j'éleve sur chaque point de la division perpendiculairement la ligne RS égale à BF, QX égale à BI, & ainsi des autres. Les lignes ainsi élevées composent une figure égale au rectangle TP dont le côté NP est égal à BM, & TN égal à AGC, puis je cherche un quarré qui soit égal à la figure ou à ce rectangle, (car l'un est égal à l'autre.) Que son côté soit la ligne marquée V. Nous dirons que comme la ligne AGC est à la ligne V, ainsi la ligne V est à la ligne BM cherchée; & ceci est la proposition universelle. Comme la ligne proposée à la ligne dont le quarré est égal à la figure ou plan fait par toutes les lignes BF,

BI,

BI, BL, &c. ainsi cette même ligne qui est le côté du dit carré, est à la ligne BM cherchée; & ainsi ces trois lignes, sçavoir la donnée, celle qui est le côté du carré susdit, & la cherchée BM sont continuellement proportionnelles.

Cherchons maintenant le centre de gravité du quart de circonférence AGZ. Alors il faudra dire : Comme la ligne AGZ étendue en ligne droite est à son demi-diametre BZ, ainsi ce demi-diametre est à la ligne cherchée BM. Mais le quart de la circonférence est au demi-diametre, comme tous les sinus tirez par les points esquels est divisée la circonférence, sont au sinus total pris autant de fois; or tous ces sinus sont les lignes BF, BI, BL, &c. répondans aux points de la circonférence divisée en parties égales infinies; & tous ces sinus sont égaux au carré du demi-diametre, comme il paroît par la troisième proposition.

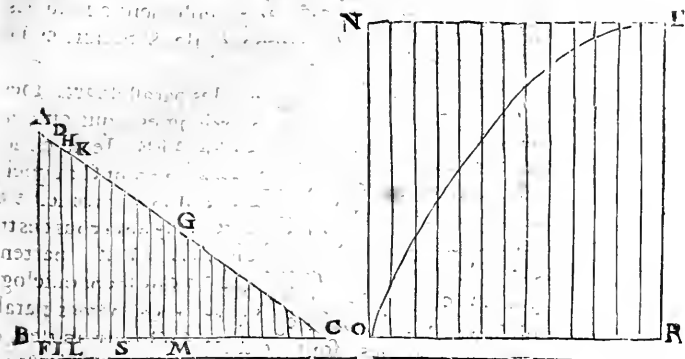
Mais si on suppose que la ligne AC soit droite, pour en trouver le centre de gravité je la divise en une infinité de parties égales & de chaque point de la division je tire des lignes paralleles à AB, qui tombent sur le levier BC & le divisent en parties égales entr'elles, & divisent la figure ABC en triangles semblables: les points de la ligne BC marquent les centres de gravité de chaque portion de la ligne proposée AC. Or tous ces centres ou pesanteurs sont entr'elles, comme les rectangles sont entr'eux, c'est à sçavoir comme le rectangle BF par AD est au rectangle BI par DH ou son égale AD; & d'autant que la portion de AC est toujours la même en tous les rectangles, les centres sont entr'eux, comme les lignes BF, BI, BL, &c. de sorte que ces petits centres ou pesanteurs particulieres sont au centre ou pesanteur totale qui est au point M (d'où on a pendu une ligne égale en grandeur & pesanteur à la ligne AC) comme

*Voyez la
Figure sui-
vante.*

toutes les lignes BF, BI, BL, &c. sont au rectangle AC par BM; car par les indivisibles on a retranché du rectangle fait de la portion de la ligne AC, sçavoir de AD & de toutes les lignes BF, BI, BL, &c. prises ensemble, ladite portion AD. Il faut trouver une ligne qui soit égale en puissance à l'espace fait par toutes les lignes BF, BI, BL, & les autres; puis je dis que comme la ligne donnée, sçavoir AC, est à cette ligne dont le carré est égal à l'espace & plan susdit fait par toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ainsi cette ligne ou côté de carré est à BM; ensorte que la ligne susdite qui peut l'espace fait par les lignes BF, BI, BL, &c. soit moyenne proportionnelle entre la ligne proposée AC, & la cherchée BM. Mais toutes ces lignes sont à BC pris autant de fois, comme le triangle au carré de la somme ou multitude desdits points, c'est-à-dire, comme 1 à 23; partant la ligne BM vaudra en puissance le quart du carré BC; & partant BM est la moitié de BC; & ainsi le centre de ladite ligne proposée est au milieu d'elle: car du point M tirant une ligne parallèle à AB, elle passera par le point G milieu de la ligne AC, & marquera le lieu de son centre de gravité.

Je viens maintenant à chercher le centre de gravité d'une figure solide, soit cône, cylindre, conoïde parabolique & hyperbolique, solide elliptique, ou de quelque autre solide connu. Parlons premièrement du cône qui est représenté par la ligne AC; & par GB tirée perpendiculairement sur AB. Le sommet du cône est C, l'axe est CB, & la ligne AB étant doublée vient à être le diamètre du cercle, ou base du cône. Que l'axe de ce cône, sçavoir BC, soit coupé par des plans perpendiculaires à cette axe en une infinité de parties égales: toutes ces divisions sont autant de cercles, qui tous ensemble par les indivisibles composent le cône, & sont entr'eux

comme les quarez de leurs diametres; ſçachant donc comme les diametres ſont entr'eux, on ſçaura auſſi la proportion des quarez. Or cette division fait dans le cône & ſur ſon axe des triangles ſemblables, comme



ABC, DFC, HIC, KLC, &c. c'eſt pourquoi les demi-diametres AB, DF, HI, KL &c. ſont entr'eux, comme les portions de l'axe BC, FC, IC, LC ſont entr'elles : or ces portions ayant differences égales, elles gardent entr'elles l'ordre naturel des nombres; les demi-diametres garderont donc entr'eux l'ordre naturel des nombres. Si les diametres gardent l'ordre naturel des nombres, leurs quarez garderont l'ordre naturel des quarez deſdits nombres; & partant ces cercles feront entr'eux comme les quarez des nombres qui ſuivent l'ordre naturel; c'eſt-à-dire comme 1, 4, 9, 16, 25, &c.

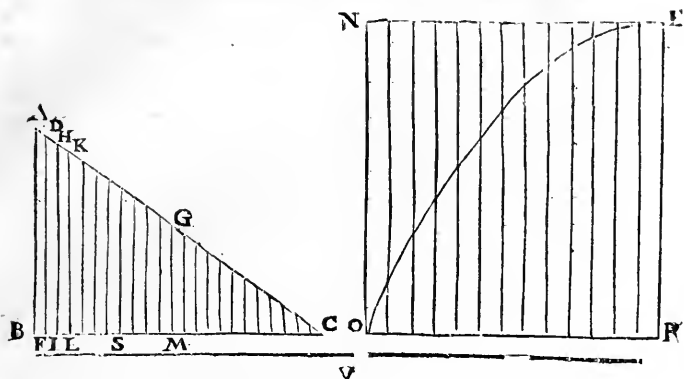
Cela poſé, pour trouver le centre de ce cône, il faut chercher un plan dans lequel les lignes tirées gardent

Xx ij

la même proportion, c'est-à-dire que la ligne soit à la ligne comme un quarré à un quarré; car le plan qui aura cette condition ne manquera pas d'avoir le centre de gravité au même lieu que le solide. Je prens pour le plan une parabole qui a pour sommet le point E : son axe est ER ; & la touchante EN représentera l'axe du cône BC. Je divise EN en parties infinies & égales, & de chaque point je tire des lignes paralleles à NO (représentant AB) qui divisent le plan ou triligne EON. On a montré que ce triligne est à son parallelogramme comme 1 à 3 ; on dira donc : Comme le triligne est à son parallelogramme, ainsi NE sera à une autre ligne V ; partant V sera triple de NE ; & si NE vaut 4, V vaudra 12. Je dis ensuite : Comme le cylindre fait par le parallelogramme de la parabole, est à la moitié du solide fait par le triligne OEN qui est renfermé dans le cylindre, ainsi 4 à 1 ; & ainsi la ligne V qui vaut 12 est à 3 qui fera la ligne CS, & le point S montrera le centre de gravité. Or BC étant 4, BS sera 1, & CS sera 3.

CENTRE DE GRAVITE' du Conoïde parabolique.

SI je cherche le centre de gravité du conoïde parabolique, je le couperai, ou son axe, en parties infinies & égales par des plans qui diviseront tout le solide en cercles (car dans le conoïde parabolique aussi bien que dans le cône, les sections faites par un plan parallele à la base, engendrent des cercles.) Or tous ces cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres; & partant sçachant comme les diametres sont entr'eux, nous sçaurons comment sont leurs quarrés. Mais dans la parabole les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les portions de l'axe : ici les portions sont



égales, & partant ils sont entr'eux comme les nombres naturels; les quarrés des diametres feront donc entr'eux en l'ordre des nombres naturels; & le premier quarré étant 1, le second sera 2, le troisiéme sera 3 &c.

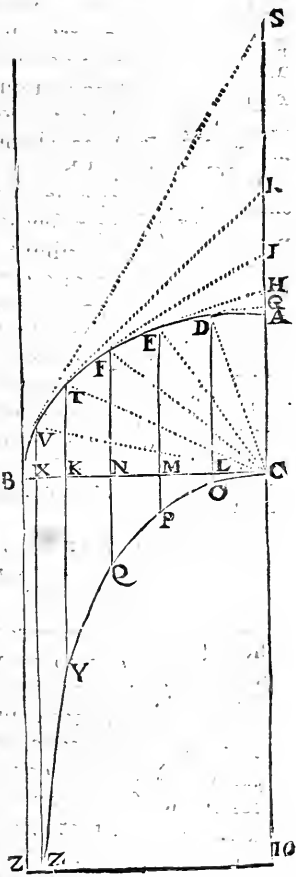
Par nostre doctrine il faut trouver une figure ou plan qui ait cette même propriété. Je trouve que le triangle fait la même chose; il faut donc feindre que ABC est un triangle. Je divise BC en parties égales & infinies, & par les points je tire des paralleles à AB: or BC représente l'axe du solide dont on cherche le centre. Cela fait je dis: Comme le plan du triangle est à son parallelogramme, ainsi BC est à la ligne V. On sçait que le triangle est au parallelogramme comme 1 à 2; partant V sera double de BC; si BC est 3, V sera 6. Après on dit: Comme le cylindre fait par le parallelogramme du triangle est à la moitié du solide, ou du cône fait par le triangle, ainsi la ligne V sera à BM qui marquera le centre. Or le cylindre susdit est à la moitié du cône comme 6 à 1; partant BM sera $\frac{1}{2}$ de la ligne V, &

le tiers de BC; le centre de gravité du conoïde parabolique fera donc au tiers de son axe du côté de la base; & ainsi divisant l'axe en trois parties égales, le premier point du côté de la base sera le centre de gravité.

Il faut observer en général, que quand on veut trouver le centre de quelque solide, après avoir divisé son axe en une infinité de parties égales, & par conséquent tout le solide, sachant quelle proportion ou raison gardent toutes les sections faites par le plan qui a divisé le solide: il faut trouver un plan duquel la propriété soit telle, que les lignes qui le divisent en une infinité de parties égales, soient entr'elles comme toutes les sections du solide sont entr'elles; si les sections, ou plans du solide sont entr'eux comme le quarré au quarré, les lignes du plan doivent être entr'elles comme le quarré au quarré. Si la proportion ou raison est autre dans le solide, elle doit être telle dans le plan: observant toujours dans le solide que si le plan est au plan comme le quarré de son demi-diamètre, au quarré du demi-diamètre de l'autre, dans le plan la ligne soit à la ligne, comme un quarré à un quarré. Voilà ce qu'il faut remarquer.

Soit la ligne courbée ou circulaire BTEA divisée en une infinité de parties égales aux points V, T, F, E, D, &c. & de chacun desdits points soit tiré une touchante comme VS, TR, FI, EH, DG, &c. à telle condition quo la dernière comme DG étant tirée, toutes les autres rencontrent plus haut la ligne CS, sçavoir plus loin du point C, comme aux points H, I, R, S &c. qui partant feront tous plus éloignés de C que le point G dans la ligne CS. Outre cela, du point B je tire la touchante, qui vient à être parallèle à CS. Cela fait, des points d'atouchement comme de D, je tire une ligne, sçavoir DO, qui soit égale & parallèle à CG; du point

E, la ligne EP égale & parallèle à HC; de F; la ligne FQ égale & parallèle à IC; semblablement la ligne TY égale à RC, & VZ égale à SC; & ainsi des autres points infinis, la ligne CS étant prolongée tant qu'il faudra, & la touchante en B tirée à l'infinie, laquelle viendra à être asymptote au regard de la ligne qui se forme par l'extrémité des lignes tirées des points de la division parallèles à CS, qui est la ligne courbe CO-PQYZ. Puis après, si du point C on tire des lignes à chaque point de la division de la courbe BFA, tout l'espace AFBC viendra à être divisé en secteurs infinis, lesquels par les indivisibles se convertissent en triangles, à cause que les petites portions des lignes courbes deviennent droites par la division infinie. Je dis davantage que tout l'espace BFACQZ jusques au bout de la courbe CQZ tirée à l'infini, & qui est entre ladite courbe, & la touchante B tirée aussi à l'infini, se trouve divisé en



parallelogrammes infinis, l'un desquels est DOCG qui représente le moindre. C'est un parallelogramme, parce que dans les indivisibles la touchante DG passe pour la partie de la ligne courbe DA, comme il a été dit ci-devant dans une autre proposition : or DO a été faite égale & parallele à GC, & pareillement de tous les autres points, on a tiré les lignes égales & paralleles à leurs correspondantes en CS.

Pour venir à la conclusion, les parallelogrammes ont tous un même côté que les triangles, qui est chaque portion égale de la ligne courbe AEB. Je dis donc que les triangles qui ont pour sommet le point C duquel partent les deux côtés du triangle, & dont le troisième est la portion de la courbe BFA divisée à l'infini ; tous ces triangles, dis-je, qui remplissent l'espace AFBC, partent du point C comme de leur sommet. Mais les parallelogrammes qui sont sur bases égales & entre mêmes paralleles que les triangles, sont doubles desdits triangles, & les uns & les autres sont entre les paralleles CO & DG & entre CP & EH &c. (ces lignes CO, CP sont seulement imaginées pour montrer que les triangles, & les parallelogrammes sont entre les mêmes paralleles, & sur des bases égales ; car les bases des uns & des autres sont les portions de la ligne courbe divisée à l'infini, & les portions des touchantes comprises entre les paralleles à CA passent & sont prises pour ces portions de courbes comprises aussi entre les mêmes paralleles.)

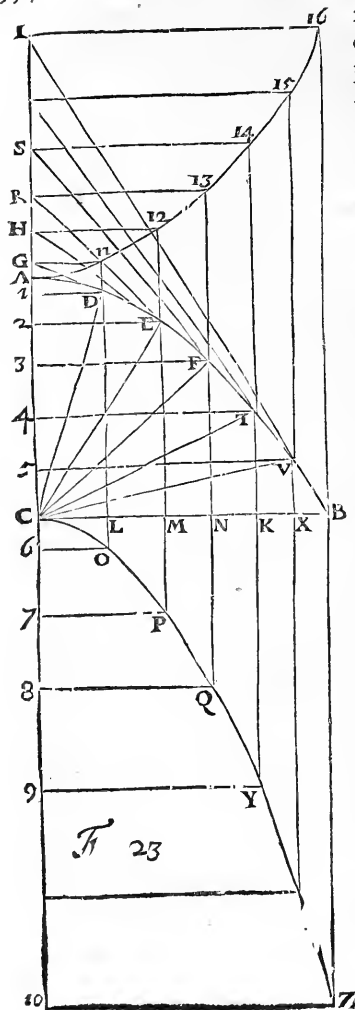
Puisque les parallelogrammes sont doubles des triangles, par les indivisibles, l'espace qui est occupé par lesdits parallelogrammes, lequel se trouve compris entre la courbe AEB d'une part, & la courbe CQZ produite à l'infini, d'autre part ; & entre les lignes droites AC & la touchante B tirée à l'infini, tout cet espace, sçavoir le quadriligne ZBFACQZ sera double de l'espace AFBC.

AFBC. Mais l'espace AFBC est celui qui est fait par les triangles; partant il sera égal à l'autre espace compris dans ZBCQZ, les deux lignes BZ & CZ étant tirées à l'infini; ce qu'il falloit démontrer.

Or la touchante BZ est asymptote, d'autant que, comme la ligne DO qui part de la touchante DG est égale à la ligne GC qui part de l'extrémité de la même touchante, & ainsi de toutes les autres lignes qui partent des touchantes, il faudroit que la ligne qui sort du point B, & qui devoit rencontrer la même ligne CQZ en quelque point plus éloigné, fût égale à la portion de la ligne CAI prolongée & comprise entre le point C & la rencontre de la touchante en B. Mais il est impossible que la touchante en B la puisse rencontrer, puisqu'elles sont paralleles; ainsi elle ne rencontrera jamais la ligne CQZ en quelque point que ce soit, & partant elle est asymptote.

Considérons la figure quand nous aurons tiré les ordonnées des points D, E, F, &c. sur l'axe CA, & pareillement des points O, P, Q, &c. sur l'axe C 10, supposant que la figure ABC soit une parabole.

Soit D 1 la premiere ordonnée de la figure ABC, & O 6 de CZ 10, on aura DO égal à GC, & aussi à 1 6; & si des deux lignes égales GC, & 1 6 on ôte la ligne C 1 qui leur est commune à toutes deux, il restera G 1 égale à C 6. Or par la propriété de la parabole, G 1 est divisée en deux également par le sommet A; partant C 6 est double de A 1; & ainsi de tous les autres, sçavoir C 7 sera double de A 2; C 8 de A 3, &c. & ainsi, comme les lignes, ou parties de l'axe de la parabole ABC sont entr'elles, ainsi les doubles parties seront entr'elles dans l'autre figure CZ 10. Mais dans la parabole les parties sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées, & partant dans la figure CZ 10 les parties de l'axe se-



ront aussi entr'elles, comme les quarrés des paralleles aux ordonnées (qui sont les ordonnées de ladite figure CZ 10) sçavoir, comme le quarré de O 6 est au quarré de P 7, ainsi C 6 est à C 7; d'où il s'ensuit que la figure CZ 10 sera aussi une parabole, qui sera double de la parabole ABC.

Mais si l'on veut que les portions de l'axe soient entr'elles comme les cubes des ordonnées, & qu'ainsi G 1 soit triple de A 1, alors C 6 sera triple du même A 1, & la parabole CZ 10 sera triple de la parabole ABC. La même chose se fera toujours changeant les paraboles, & faisant que les portions de l'axe soient entr'elles comme les quarré - quarré, quarré cubes &c. des ordonnées à l'axe desdites paraboles.

Maintenant il faut voir comment se fera

la quadrature de la parabole. Pour cet effet il faut considérer dans ABC que les ordonnées & les portions de l'axe forment des parallelogrammes qui remplissent la figure. Pour l'autre figure CZ 10, je la puis considérer comme ayant tiré du point B une touchante qui rencontre CI en I (car dans la parabole la touchante au point B n'est point parallele à CI, comme à la figure précédente, & partant elle doit rencontrer la ligne CI.) De ce même point B on tire BZ parallele à CI qui rencontrera la ligne CQZ; car cette ligne n'est formée que par l'extrémité des lignes paralleles à CA. Du point de la rencontre soit fermée la figure CQZ 10. Les ordonnées de la parabole ABC seront égales aux ordonnées de la parabole CZ 10. Mais les portions de l'axe de la parabole ABC ne valent que la moitié des portions de l'axe de la parabole CZ 10; partant celles-ci sont doubles de celles-là, & partant les parallelogrammes de la parabole CZ 10 sont doubles des parallelogrammes de la parabole ABC; & partant la parabole CZ 10 sera double de ABC, ou du triligne qui lui est égal BCQZ; & le parallelogramme CBZ 10 triple de la même parabole ABC; donc ladite parabole CZ 10 sera les deux tiers dudit parallelogramme CBZ 10; & de cette sorte je trouve la quadrature de la parabole, puisque j'ai un parallelogramme qui a raison avec la parabole, Archimède s'étant contenté de trouver une parabole égale, ou bien en raison, à un triangle. Que si on prend les cubes, quarré-quarrez & autres puissances des ordonnées on en conclura de même la quadrature de ces paraboles.

Il faut maintenant prouver que les deux trilignes DA 1, & OCL sont égaux; & pour cet effet ayant tiré la ligne droite CD, je dis que le triligne CDA est la moitié du quadriligne CODA: si donc de ce quadrili-

gne j'ôte le parallélogramme CLD 1, il restera les trilingnes COL & AD 1; si du trilingne on ôte le triangle CD 1, il restera le trilingne DA 1; par ainsi d'une grandeur double d'une autre grandeur, j'ai tiré une partie double d'une partie que j'ai tirée de l'autre, partant le reste de la grande doit être double du reste de la petite, & de cette sorte DA 1, & LCO sont doubles de DA 1; donc DA 1 sera égal à LCO, ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à faire voir que la ligne CD coupe en deux également le quadriligne CODA (car il n'est pas toujours véritable.) Pour cet effet on suppose OD pour un des côtes du parallélogramme, & pour l'autre la portion DA indivisible sur la touchante DG ou sur la ligne courbe DA qui est la même chose, & le triangle CD avec la même portion indivisible DG ou DA. Je dis que le parallélogramme est double du triangle; car ils sont sur des bases égales, qui sont lesdites portions indivisibles, & entre mêmes parallèles, sçavoir OC & DG; ainsi CD coupe le parallélogramme, ou pour mieux dire, le quadriligne ODAC en deux également; car nous ne considérons plus l'espace DAG ni celui qui est compris entre la courbe OC & la droite OC; car ces espaces ne sont point de nos parallélogrammes & triangles. Or tous ces triangles ne sont considérez que comme des lignes, sçavoir CD, CE, & les autres à l'infini; & toutes les lignes ou triangles remplissent l'espace ABC comme les parallélogrammes (au lieu desquels nous prenons les lignes DO, EP, FQ, &c.) remplissent l'espace ZB-ACQZ, soit que les lignes BZ & CQZ se rencontrent ou non.

Venons maintenant au solide qui se fait par la révolution de la figure sur l'axe AC. Nous voyons qu'il se fait plusieurs cylindres, rouleaux de cylindres, cônes, ou rouleaux de cônes; comme le cylindre fait sur l'axe

CA par le parallelogramme CADO; le cône fait sur la même CA, & par le triangle CAD; puis les rouleaux de cylindres faits par les petits parallelogrammes, comme sont DOPE & les autres semblables qui ont pour base les portions indivisibles de la courbe, & les rouleaux de cônes qui sont faits par les triangles comme CDE, CEF & les autres semblables autour de l'axe CA. Mais les cônes sont aux cylindres qui sont sur même base, comme 1 à 3, & les rouleaux des cônes sont aux rouleaux des cylindres en même raison; & partant le solide fait de ABC sera le tiers du solide ZBACQZ; & si les lignes BZ, CZ ne se rencontre point, il faut supposer le solide continué à l'infini de ce côté-là, & ôtant le solide fait de ABC, restera le solide BCZ, qui sera double du même ABC. Dans les plans nous avons trouvé que le plan ABC est égal au plan BCZ continué à l'infini s'il est besoin. Il faut maintenant considérer ces figures comme paraboles; & par conséquent la touchante du point B, ou plutôt la ligne tirée de B parallèle à AC rencontra la courbe CZ continuée. Soit donc fermé la figure au point de la rencontre, & soit CZ 10 la figure tournant sur son axe, & comparant les cylindres faits par les parallelogrammes D 1 A, E 2 A, &c. à ceux de l'autre parabole comme O 6 C, P 7 C, &c. parce que les ordonnées D 1, O 6, &c. de l'une & de l'autre figure sont toutes égales; mais les portions de l'axe de la parabole CZ 10, comme C 6, &c. sont doubles des portions de l'axe AC, comme A 1 &c. il s'ensuit que chaque cylindre d'embas fera double de celui d'en haut, & partant tout le solide d'embas fait par CZ 10 roulant sur C 10 sera au solide fait par ABC tournant sur AC, comme 2 à 1. Mais on a vû que le solide de AB étoit au solide fait par ZQCB, comme 1 à 2; partant ledit solide de ZQCB sera égal au solide de CZ 10;

& ainsi le solide de CZ 10 sera la moitié du cylindre fait par le parallelogramme CBZ 10, ce qu'il falloit démontrer.

*Voyez la
Figure de la
page 354.*

Il faut maintenant considérer une autre figure qui se fait élevant du point L une ligne égale & parallele à CG, sçavoir L 11; du point M tirant M 12 égale & parallele à CH, & ainsi des autres, & par l'extrémité desdites lignes se forme la ligne courbe A 11 12 16, & de chacun desdits points on tire les ordonnées 11 G, 12 H, 13 R, &c. qui sont égales à celles de ABC tirées des points correspondans DEF, &c. qui sont infinis : de plus AG est égal à A 1, AH égal à A 2, &c. dans la parabole simple.

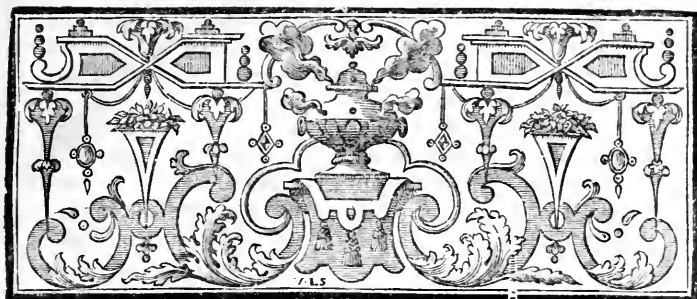
On considérera aussi que les lignes L 11, & DO sont égales, & pareillement M 12 & EP; N 13 & FQ, &c. & partant les parallelogrammes 11 LM 12, 12 MN 13, &c. sont égaux aux parallelogrammes ODEP, PEFQ, &c. car on ne prend ici que les lignes DOEP &c. ou leurs égales L 11, M 12, &c. au lieu desdits parallelogrammes. Or on a montré que les triangles CAD, CDE, CEF &c. sont la moitié des parallelogrammes AO, DP, EQ, &c. partant ils seront aussi la moitié des parallelogrammes ACL 11, 11 LM 12, 12 MN 13, &c. l'espace ABC est donc la moitié de l'espace 16 ACB, soit que les lignes A 16, & B 16 se rencontrent ou non. D'où il s'ensuit que ABC est égal à l'espace BA 16, quand même les lignes A 16 & B 16 étant prolongées à l'infini, ne se rencontreroient point. On pourroit montrer la même chose plus brièvement, comme il s'ensuit. Les lignes 11 L, 12 M, 13 N, & les autres infiniment, étant égales aux lignes DO, EP, FQ, &c. il s'ensuit que l'espace ZCA B est égal à BCA 16; ôtant donc ABC commun, restera BA 16 égal à BCZ qui a été ci-devant montré égal à ABC, & partant 16 AB lui est aussi égal.

Maintenant soit ABC la premiere parabole, la touchante BI rencontrant CI, la ligne B 16 égale & parallele à CI rencontrera la courbe A 16 au point 16, & la figure A 16 I sera une parabole égale & semblable à ABC : car les ordonnées de l'une sont égales aux ordonnées de l'autre, sçavoir, D 1 à G 11, E 2 à H 12 &c. puisqu'elles sont entre les mêmes paralleles : & par la propriété de la parabole, AG est égal à A 1, AH à A 2, AR à A 3, &c. sçavoir les portions de l'axe où aboutissent les ordonnées correspondantes sont égales; & partant toute la parabole ABC sera égale à toute la parabole A 16 I. Or on a trouvé que l'espace BA 16 est égal à ABC; partant les trois pieces ou espaces ABC, A 16 I, & BA 16 comprises dans le parallelogramme ICB 16, & qui le forment, sont égales entr'elles.

Ce que nous venons de dire ici de la premiere parabole, ou de la parabole du premier genre, ce qui est la même chose, se doit entendre aussi des paraboles des autres genres, c'est-à-dire que, si la parabole ABC est du troisiéme genre, la parabole A 16 I sera aussi du troisiéme genre; mais elle ne sera pas la même que la parabole ABC : car les parties AG, AH, AR, &c. sont bien entr'elles en même raison que les parties A 1, A 2, A 3 &c. mais AG n'est pas égale à A 1, ni AH égale à A 2 &c. comme elles sont dans la parabole du premier genre.



DE



DE TROCHOIDE EJUSQUE SPATIO.

DEFINITIONES.

SI circulus duplici motu simul & eodem tempore moveatur, altero quidem recto, quo centrum illius feratur secundum lineam rectam: altero autem circulari, quo ipse cum omnibus suis radiis circa centrum suum circumvolvatur; sitque uterque motus sibi ipsi semper uniformis, & alter alteri æqualis, ita ut recta quam percurrit centrum spatio unius integræ conversionis circumferentiæ, intelligatur esse eidem circumferentiæ æqualis: atque inter movendum circulus ipse perpetuò maneat in eodem plano infinito in quo extitit in initio motus: ejusmodi circulum vocamus *Rotam*.

Recta per quam fertur centrum, vocetur *iter centri*.

Quæcunque puncta vel lineæ à circulo denominantur, denominentur hic à rotâ, ut centrum rotæ, radius rotæ, circumferentia rotæ, &c.

Rec. de l'Acad. Tome VI.

Z z

Manifestum est autem circumferentiam rotæ contingere continuè & successivè in aliis atque aliis punctis quandam lineam rectam itineri centri parallelam : vocetur hæc *via rotæ*.

Manifestum est quoque quidquid accadat in quavis integrâ circumvolutione rotæ, idem quoque accidere in quâcunque aliâ : modo initia circumvolutionum sumantur à radiis similiter positis, id est, qui cum itinere centri æquales ad easdem partes angulos constituent, sintque radii ipsi paralleli.

Nos itaque unam conversionem assumamus, cujus initium statuimus in eo rotæ radio qui perpendicularis est tam viæ rotæ quàm itineri centri, eumque ipsum radium, dum ad motum rotæ movetur, consideramus ac prosequimur, donec absolutâ integrâ conversione, idem ab eadem parte fiat rursus iisdem viæ rotæ & itineri centri perpendicularis. Hic ergo radius in initio circumvolutionis vocetur *radius principii motûs*: in medio autem dum ipse perpendicularis est itineri centri, sed ad alteras partes constitutus, dicetur *radius medii motûs* : & tandem in fine, *radius perfecti motûs*.

Quòd si radius ipse in quâcunque positione produci intelligatur utrinque quantum libuerit etiam extra rotam, idem dicetur linea principii, medii, vel perfecti motûs.

Jam in lineâ principii motûs indefinitè productâ versùs viam rotæ intelligatur sumptum quodcumque punctum præter centrum, atque inter ipsum centrum versùs viam rotæ, etiam in eâdem viâ aut ultrâ, cujus puncti motus spectetur : fiet necessariò ut propter implicationem motûs circularis cum recto, ipsum punctum describat lineam aliquam, cujus portio quædam ab unâ parte itineris centri, altera autem portio ab alterâ parte existat ; ea autem incipiet in lineâ principii motûs, & in lineâ perfecti motûs desinet. Vocetur hæc *Trochoides*.

Recta quæ Trochoidis hujus extrema puncta jungit, estque vel via rotæ, vel ei parallela, dicatur *Trochoidis ejusdem basis*. Portio linearæ mediî motûs intercepta inter trochoidem & basim ejus, *axis Trochoidis* vocabitur; qui quidem axis ab itinere centri bifariam secabitur in puncto quod nos *centrum trochoidis* nuncupamus. *Vertex* autem *trochoidis* est extremum axis punctum in trochoide existens, seu basi oppositum.

Jam manifestum est à trochoide & ab ejusdem basi comprehendi spatium quoddam planum; quod nos postea vocabimus *spatium trochoidis*. Ejus centrum, basis, axis & vertex iidem qui trochoidis intelligantur.

Quæcunque recta ab aliquo puncto trochoidis ducitur usque ad axem parallela viæ rotæ, dicatur *ad axem ordinata*.

Item, mensura integri motûs conversionis rotæ intelligatur tota circumferentia rotæ: mensura dimidii motûs intelligatur dimidia circumferentia; & sic in universum mensura cujusvis partis motûs rotæ intelligatur esse arcus circumferentiæ ejusdem rotæ, qui ad integram circumferentiam eandem habeat rationem, quam pars motûs assumpta ad motum conversionis integræ.

Præterea, si circa axem trochoidis tanquam circa diametrum, & circa ejusdem trochoidis centrum circulus describatur, is erit vel rota ipsa, vel eadem major aut minor, prout punctum, quod trochoidem descripsit, sumptum fuerit vel in circumferentiâ rotæ, vel extra vel intra ipsam rotam. Et siquidem circulus ipse sit rotæ æqualis, seu rota ipsa; tunc ipsa trochoides denominabitur à rota simplici, diceturque *trochoides rotæ simplicis*, seu *trochoides veræ rotæ*. Si autem ipse circulus circa axem trochoidis descriptus major sit quàm rota, tunc trochoides denominabitur à rotâ contractâ, diceturque *trochoides rotæ contractæ*. Si tandem circulus minor sit ip-

sâ rotâ, ejus trochoides denominabitur à rotâ prolâtâ, diceturque *trochoides rotæ prolatae*. Spatia, basés, & cætera ad ipsas trochoides pertinentia, curvæ suæ denominationem fortiantur : at circulus ipse circa axem trochoidis tanquam circa diametrum descriptus, dicatur circulus suæ trochoidi proprius.

Et quia positis iis quæ jam dicta sunt, concipi potest duplex rotæ motus circularis, prout motus circuli circa centrum intelligi potest fieri ad hanc vel illam partem : nos eum assumimus, qui rotis communibus convenit, quo quidem motu pars interior circumferentiæ, putà quæ adjacet viæ rotæ, fertur non ad eandem partem ad quas centrum tendit motu recto, sed ad contrarias ; superior autem rotæ pars quæ viæ ejus opponitur, fertur secundum motum centri. Hic enim motus omnium rotarum physicarum proprius est & veluti naturalis ; alter autem eidem contrarius est, veluti violentus & contra naturam rotæ : geometricè tamen uterque considerari potest, nec alia inter trochoides quæ ab ipsis orientur, accidet differentia, nisi quod quæ partes erant unius extremæ in alterâ, eadem erunt mediæ ; spatia autem longè different cùm figurâ tùm magnitudine, sed quia unum erit veluti complementum alterius, ideo ex uno noto dabitur alterum ; quam speculationem nos in aliud tempus remittimus. Agimus autem hîc de trochoide rotæ tam simplicis quàm prolatae & contractæ, sed motu communi rotæ physicæ motæ, ac de eâ & de spatio ejus sequentia enuntiamus Theoremata, quorum pars statim demonstrabitur ; reliqua autem pars quæ longissimæ & acutissimæ speculationis est, opportuno tempore suam nanciscetur demonstrationem, quam quidem à nobis inventam (ut cætera quæ ad rotam pertinent) eo usque retinemus donec per tempus liceat integrum opus producere.

Supponimus autem quædam quæ etsi per se demonstrationem requirant, tamen ea tam facilis est, ut cuiusvis in Geometriâ mediocriter versato statim appareat, qualia sunt hæc. In primo quadrante integræ conversionis rotæ punctum quod trochoidem describit, percurrit spatium quod est inter basim trochoidis & iter centri; idemque punctum motu recto posterius est centro rotæ. In secundo quadrante idem punctum percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad verticem trochoidis, estque adhuc posterius centro rotæ. In tertio quadrante punctum idem percurrit spatium quod est à vertice trochoidis usque ad iter centri, sed jam hoc punctum præcedit respectu centri, quod sequitur si motus recti habeatur ratio. In quarto & ultimo quadrante punctum de quo agimus percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad basim trochoidis, & adhuc idem punctum præcedit, centrum autem rotæ sequitur motu recto.

Hinc verò atque ex quibusdam aliis quæ naturam rotæ motæ, ut dictum est, statim consequuntur, demonstrabitur facile trochoidem quæ fit ab unicâ conversione cujuscunque rotæ in seipsam non recurrere, seu per idem punctum bis transire non posse: contrarium autem accideret in rotâ prolatâ, si aliud à nostrâ sumeretur principium.

Nec minus facile est demonstrare eam trochoidis partem, quæ est à principio usque ad verticem æqualem esse & similem alteri parti quæ est à vertice usque ad finem, & ambas partes sibi invicem congruere posse. Item, primam medietatem ejusdem trochoidis totam esse ab unâ parte axis, secundam verò totam esse ab altera. Idem dictum intelligatur de duabus partibus spatii ipsius trochoidis quæ ab ejusdem axe constituuntur. Atque ita quæ in unâ ex his medietatibus demonstrabuntur, in alterâ quoque medietate demonstrata esse quivis facile

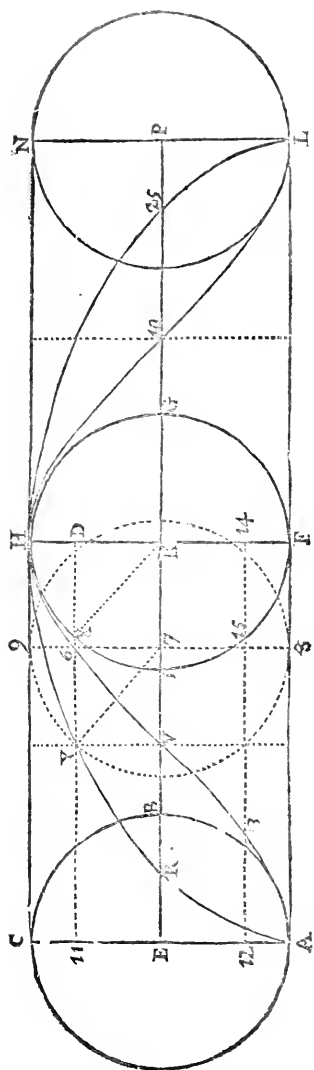
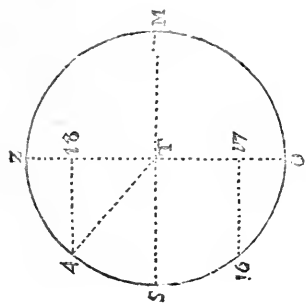
intelliget, collatis invicem duarum medietatum partibus illis quæ sunt prope verticem &c. His positis primaria trochoidis proprietates, quam propterea demonstrabimus, videtur esse hæc.

PROPOSITIO PRIMA.

Si ab assumpto puncto primæ medietatis trochoidis ad axem ordinata sit recta quævis, ejus portio quædam erit extra circumulum ipsi trochoidi proprium; quæ quidem portio æqualis erit arcui rotæ, qui mensurat eam partem motus, quæ restat inde ab eo tempore, quo notatum est à puncto mobili punctum assumptum, usque ad medietatem integræ conversionis rotæ.

EST O recta EP; iter centri rotæ cujusdam æqualis circulo seorsim posito SOMZ, cujus centrum T; sitque recta CEA linea principii motus, intelligaturque recta EP æqualis circumferentiæ rotæ SOMZS, & recta NPL sit linea perfecti motus. Tum divisâ EP bifariam in puncto K, ducatur recta HKF, quæ sit linea medii motus; puncta autem A, F, L sint ad easdem partes respectu rectæ EP, & puncta C, H, N ad easdem partes inter se, sed ad alteras respectu ejusdem rectæ EP, & punctorum A, F, L.

Concipiatur jam in linea principii motus CEA assumptum esse punctum A, ad describendam trochoidem, sive recta EA æqualis sit semidiametro rotæ TO, quo pacto fiet trochoides rotæ simplicis; sive ipsa EA major sit quàm TO, ut fiat trochoides rotæ prolata; sive denique minor ut habeamus trochoidem rotæ contractæ: moveaturque rota hoc pacto ut centrum illius percurrat rectam EP, interim dum ipsa motu circulari absolverit unam integram conversionem circa idem centrum, posito utroque motu sibi ipsi semper uniformi:



feratur autem unà cum rotâ recta EA, quæ ad motum rotæ æqualiter circumvolvatur, ita ut in medio motûs integre conversionis ipsa EA conveniat rectæ KH, in fine autem eadem conveniat rectæ PL; sicque propter implicationem motûs circularis cum recto punctum A describat trochoidem ARYHL, cujus basis AL, axis HF, vertex H, centrum K, & spatium ARYHLA; sint etiam puncta A, F, L in eadem rectâ lineâ quæ est basis, & puncta C, H, N in aliâ rectâ ipsi basi & itineri centri parallelâ, ut sit ALNC parallelogrammum rectangulum. Præterea centro K, & intervallo KH, seu KF, æquali ipsi EA, describatur circulus HIFG, cujus circumferentia secet iter centri versûs principium quidem in I, versûs finem autem in G, qui circulus erit proprius trochoidi ex definitione, eritque idem vel æqualis rotæ, vel ipsâ major aut minor, quod hoc loco nihil refert. Item in lineâ ARYH, quæ est prima medietas trochoidis sumatur quodcunque punctum Y, à quo ad axem HF, ordinata sit recta YD secans primam semicircumferentiam circuli proprii in puncto X.

Dico primò portionem aliquam ipsius YD esse extrâ circulum FIH. Quia cum punctum Y est in primâ medietate trochoidis, quæ quidem per ipsum punctum Y semel tantum transit, ut superius positum est, non potest esse nisi unica positio rotæ in quâ illâ existente notatum est punctum Y, atque in illâ positione centrum ipsius rotæ extitit inter puncta E, K, scilicet intra primam medietatem itineris centri. Existat igitur eâ positione centrum illud in puncto 7, per quod ducatur recta 879 parallela lineæ mediî motûs FKH, secans basim quidem AL, in puncto 8, rectam verò CN in puncto 9; ducatur quoque recta 7 Y, quæ quia ducitur à centro rotæ 7 in hac positione ad punctum Y, quod in eadem positione trochoidem describit, æqualis erit rectæ
EA,

EA, seu potius recta 7 Y erit ea ipsa EA, cujus punctum E motu recto pervenit in 7, punctum autem A motu implicato perlatum est in Y, describens trochoidis portionem ARY, & eadem recta motu circulari rotæ positionem suam mutavit secundum angulum 8 7 Y : huic ergo angulo constituatur æqualis OT₄ rotæ scorsim positæ, cujus OTZ sit diameter, & punctum 4 in circumferentiâ.

Conveniente ergo per intellectum centro T cum centro 7, & angulo OT₄ angulo 8 7 Y, sive latera æqualia sint, sive non, manifestum est ex naturâ rotæ, arcum O₄ esse mensuram motûs jam peracti à principio conversionis; & arcum 4Z qui cum O₄ complet semicircumferentiam rotæ, esse mensuram motûs qui deest ad complendam dimidiam conversionem : & quia æquales sunt ambo motus rotæ, circularis scilicet & rectus, & uterque uniformis sibi ipsi, manifestum est quoque rectam E7 æqualem esse arcui O₄, & rectam 7 K arcui 4Z : quod notetur.

Centro 7, intervallo autem 7 Y, vel 7 8, vel 7 9, quæ æqualia sunt, describatur circulus cujus diameter erit 8 7 9. Quoniam ergo per ea quæ posita sunt punctum Y in prima medietate trochoidis existens sequitur post centrum motu recto, erit ipsum Y respectu diametri 8 9 versûs principium curvæ, jacebitque propterea ipsa diameter 8 9 inter punctum Y & axem HF, eademque secabit rectam YD ordinatam ad axem, esto in puncto 6 : rectæ ergo DH, 6 9 æquales sunt, sicuti & rectæ FD, 8 6 ; & rectangulum FDH, æquale rectangulo 8 6 9, quæ rectangula cum sint æqualia quadratis XD, Y 6, erunt hæc quadrata æqualia, & recta DX æqualis rectæ 6 Y : sed recta DY major est quàm 6 Y, totum scilicet parte ; ergo eadem DY major est quàm DX ; excessus autem est portio XY ; hæc itaque portio

est extra circulum FXH trochoidi AYH proprium; quod primo loco demonstrandum erat.

Dico secundo eandem portionem exteriorem XY, æqualem esse arcui $4Z$. Quoniam enim ostensæ sunt æquales DX, & $6Y$, sunt autem puncta X 6 vel simul, vel sejuncta, & hoc casu vel punctum X est inter puncta D & 6, vel è contrario ipsum X est inter puncta 6, Y, secundum diversas species trochoidum rotæ simplicis, prolata, vel contractæ, quod hoc loco nihil refert: quidquid sit additâ vel subtractâ communi X 6, si quæ inter puncta X 6 interjaceat, fiet recta D6 æqualis rectæ XY, est autem D 6 æqualis rectæ K 7, seu arcui $4Z$, ut notatum est; quare & recta XY eidem arcui $4Z$ est æqualis, quod secundo loco demonstrandum erat: quare constat Propositio.

Corollarium primum.

HINC manifestum est arcum XH similem esse arcui rotæ $4Z$, sicuti arcus FX similis est arcui O 4; & est $4Z$ quicunque arcus mensurans motum qui deest ad dimidiam conversionem, & O 4 mensurat motum jam transactum, quod notasse in sequentibus usui erit.

Corollarium secundum.

HIC demonstrari potest in rotâ simplici, atque in prolata rectam 6D majorem semper esse quàm λD propterea quod ipsa rota seu circulus O 4 Z tunc æqualis est circulo proprio FXH, vel ipso major; idcircoque arcus 4Z, æqualis est arcui XH, vel ipso major, quia similes sunt ipsi arcus. Sed recta 6D æqualis est arcui 4Z, ex demonstratis; quare eadem 6D æqualis est arcui XH, vel ipso major: arcus autem XH sem-

per major est recta XD; quare hoc casu recta 6 D semper major est quam XD.

In rotâ autem contractâ, quia ipsa rota minor est quam circulus sibi proprius FXH, atque ideo arcus 4 Z semper minor est arcu sibi simili XH secundum rationem diametri rotæ ad diametrum circuli sibi proprii, erit recta 6 D, quæ æqualis est arcui 4 Z, semper minor arcu XH, secundum eandem rationem; hic autem arcus XH, quia assumptus est utcumque minor semicircumferentiâ circuli proprii FIH, potest habere ad rectam XD quamcunque rationem majoris ad minus, scilicet ut diameter FH, ad diametrum rotæ OZ. Fieri ergo poterit aliquando ut arcus XH ad rectam XD eandem habeat rationem quam ad rectam 6 D, aliquando majorem & aliquando minorem; ideoque in rotâ contractâ poterit recta 6 D æqualis esse rectæ XD, vel ipsa major aut minor: atque ita punctum 6 erit vel simul cum puncto X, vel inter puncta Y, X; vel inter puncta X, D.

Et quidem quod res ita se habeat in universum ex his satis patet; quibus autem in punctis quave positione rotæ omnes istæ differentiæ accidant in datâ quâcunque ratione diametri rotæ contractæ ad diametrum circuli sibi proprii demonstrare longum esset & difficillimum, opusque esset hoc assumpto; scilicet dato cuivis arcui circumferentiæ circuli, intelligi posse rectam lineam æqualem, minorem, vel majorem.

Corollarium tertium.

ILLUD quoque ex demonstratis statim apparet, scilicet trochoidem occurrere circumferentiæ circuli sibi proprii in unico puncto verticis, atque in eo puncto tantum lineas ipsas sese tangere, ipsumque circumulum totum contineri interi spatium ejusdem trochoidis.

A a a ij

Corollarium quartum.

HINC præterea clarum est ipsam trochoidem non esse lineam rectam nec ex duabus rectis compositam, siquidem illa à puncto A pervenit ad punctum H, nec tamen ingreditur aut secat circulum proprium FXH, quem secaret necessariò si recta esset à puncto A ad punctum H, sive à puncto H ad punctum L: non est ergò recta, nec ex duabus rectis composita.

Quod autem cujuscunque trochoidis nulla pars lineæ rectæ congruere possit, sed omnes partes sint curvæ, atque penitus ab aliis quibuscunque curvis huc usque notis diversæ, demonstrari quidem potest, sed demonstratio longa est & difficilis, neque hujus loci, quando quidem ad ea quæ intendimus non requiritur.

Corollarium quintum.

QUIA in antecedenti Propositione punctum 6 est sectio communis rectæ ordinatæ YD & rectæ 879, quæ est diameter circuli 8Y9, qui concentricus est rotæ ita positæ, ut centrum illius sit 7: si intelligatur alia atque alia positio rotæ ab initio motûs donec centrum illius percurrerit rectam EK, manifestum est aliud atque aliud fore ipsum punctum 6; ipsumque moveri incipere à puncto A, & in medio motus integræ conversionis rotæ, idem pervenire ad punctum H, atque adeo ipsum ferri secundùm lineam quandam A6H secantem rectam EK in puncto V. Quòd si idem ferri intelligatur à puncto H ad punctum L, fiet reliqua dimidia pars ejusdem novæ lineæ, secans rectam KP in puncto 10; atque ideo ipsa integra erit AV6H10L, hanc nos vocamus *trochoidis comitem*, seu *sociam*.

Vertex, basis, axis & centrum illius eadem sunt quæ trochoidis, cujus illa comes est. Quod autem ab ipsa & basi suâ comprehenditur spatium planum, ab eadem denominetur. Item, quæ à trochoide & ab ejus comite comprehenduntur duo spatia, quorum alterum est AYHVA, inter lineas principii & medii motus: alterum verò ei simile & æquale inter lineas medii & perfecti motus; singula à duabus illis lineis simul nomen fortiantur, dicaturque unumquodque spatium trochoide & suâ comite contentum: ordinata ad axem comitis trochoidis dicatur quævis recta à quocunque puncto ejusdem comitis ad axem ducta parallela basi.

PROPOSITIO SECUNDA.

Si à quocunque puncto trochoidis ad axem ordinetur recta quæpiam, hujus portio erit ordinata ad axem comitis ejusdem. quæ quidem portio æqualis erit ei ejusdem ipsius ordinata ad trochoidem portioni, quæ interjicitur inter ipsam trochoidem & circumferentiam convexam circuli eidem trochoidi proprii.

MANIFESTA est hæc Propositio ex iis quæ jam demonstrata sunt. Esto enim YD recta quæcunque à puncto Y in trochoide existente ad axem FDH ordinata, & ponantur eadem quæ superiùs. Existit punctum 6 in ejusdem trochoidis comite, ex definitione; & recta 6D erit ad axem ipsius comitis ordinata: recta verò XY interjicitur inter trochoidem & circumferentiam convexam circuli ipsi proprii. Ostensum autem est rectas ipsas 6D & XY esse inter se æquales; quare patet Propositio, quæ id tantum enuntiabat.

Corollarium primum.

HINC manifestum est eandem ordinatam 6 D æqualem esse arcui rotæ 4 Z.

Corollarium secundum.

PERSPICUUM est etiam rectam Y 6, quæ interjicitur inter trochoidem & ejus sociam, æqualem esse rectæ XD interjectæ inter circumferentiam circuli proprii & axem.

Corollarium tertium.

SED & hic demonstrari potest in rotâ simplici comitem trochoidis occurre circumferentiæ circuli proprii in vertice tantum, atque in eo solo puncto lineas ipsas sese contingere. Quod idem accidit comiti trochoidis rotæ prolatae. At in curva rotæ contractæ comes secat circumferentiam circuli proprii infra verticem, idque semel tantum in primâ dimidiâ conversione rotæ, & rursus semel tantum in alterâ dimidiâ conversione: ac præterea eadem comes eandem circumferentiam tangit interiùs in vertice, cujus quidem Enuntiati longa est demonstratio, non tamen ita difficilis; sed de his aliàs.

Corollarium quartum.

ID autem peculiare est rotæ simplici, quod angulus contactus qui fit à comite trochoidis illius & circumferentiâ circuli ipsi proprii, minor sit omni angulo contactus duorum quorumvis circulorum etiam interiùs sese tangentium: quod rursus in alium locum remittimus,

propter prolixitatem demonstrationis, quæ tamen non est admodum difficilis.

Corollarium quintum.

ITEM cujuslibet trochoidis comes nec recta est, nec ex duabus aut pluribus rectis composita; nec trochoidi nec alii cuius curvæ ex iis quæ huc usque notæ sunt ita occurrere potest ut pars sit eadem, & pars non sit communis: quod, quia demonstrare longum est & difficillimum, neque ad ea quæ intendimus requiritur, ideo prætermittimus.

PROPOSITIO TERTIA.

Si à quocunque puncto primi quadrantis comitis trochoidis ad axem ipsius ordinata sit recta quævis, quæ usque ad lineam principii motus producat; item ab aliquo puncto secundi quadrantis ejusdem comitis eodem modo ordinata sit alia recta (modo ipse ordinata æqualiter distent hinc inde ab itinere centri rotæ) earum rectarum sic productarum portiones permutatim sumptæ, erunt æquales; ita ut quæ in unâ earum rectarum inter comitem & axem interjicitur portio, æqualis sit ei alterius rectæ portioni quæ interjicitur inter eandem comitem & lineam principii motus, & reciprocè.

PONANTUR eadem quæ suprà in eadem figura; atque in linea A 13 V, primo scilicet quadrante comitis, sumptum sit punctum quodcunque 13, à quo ad axem FH ordinata sit recta 13 14, quæ minor erit quàm AF, quia ipsa AF æqualis est semicircumferentiæ rotæ; 13 14 autem ipsâ semicircumferentiâ minor. Producat ergo eadem 13 14 donec occurrat lineæ

principii motûs AC in puncto 12. Tum in axe FH intelligatur portio KD æqualis portioni K 14; sed ad diversas partes, & ducatur recta D 6 11 parallela rectæ KE, occurrens comiti quidem in puncto 6, quod erit in secundo ipsius quadrante, lineæ autem AC in puncto 11. Dico rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11, & reciproçè rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D. Secet enim recta 12 14 circumferentiam FIH in puncto 15; & recta 11 D secet eandem circumferentiam in puncto X, sintque puncta 15, X in eâdem semicircumferentiâ quæ est versus principium motûs: item in semicircumferentiâ rotæ OSZ, sit arcus Z 4 similis arcui HX; & arcus Z 16 similis arcui H 15; sintque ZS, & OS quadrantes, sicuti HI, & FI. Jam quia æquales sunt rectæ K 14, KD erunt arcus IX, & I 15 æquales. Item æquales erunt arcus F 15, HX; & æquales FX, H 15: ac propterea in rotâ æquales erunt arcus S 4, S 16. Item æquales arcus O 16 & Z 4; & æquales O 4, Z 16. Quare ex Corollario primo Propositionis primæ, quia arcus HX, similis est arcui qui mensurat motum, qui superest ad dimidiam conversionem in eâ positione rotæ, erit arcus Z 4 eâ ipsa mensura ejusdem motûs. Eâdem ratione erit arcus Z 16 mensura motûs qui superest ad dimidiam conversionem rotæ, dum notatur ab ipsâ punctum 13; ac propterea ex Corollario primo Propositionis secundæ, tam recta 6 D æqualis est arcui 4 Z, quàm recta 13 14 æqualis arcui 16 Z: ambo autem ipsi arcus 4 Z & 16 Z simul sumpti æquales sunt semicircumferentiæ OZ (ostensus est enim arcus 4 Z æqualis ipsi 16 O) ideoque duæ rectæ 6 D & 13 14 simul sumptæ æquales sunt eidem semicircumferentiæ OZ, sive rectæ D 11, vel 14 12. Demptis ergo communibus sequitur rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D; & rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11; quod erat ostendendum.

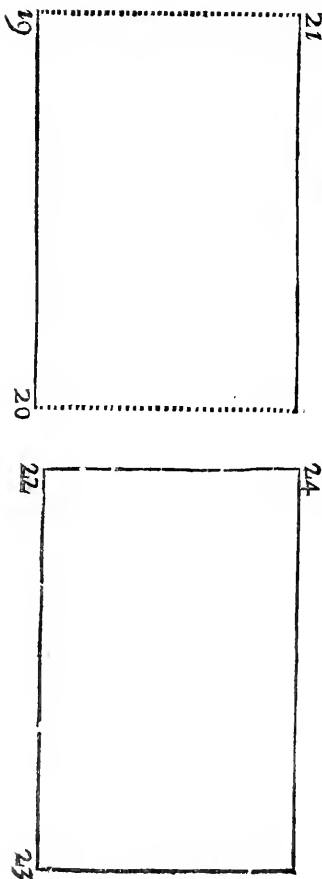
PROPOSITIO

PROPOSITIO QUARTA.

Quod à trochoidis comite & ab ipsius base continetur, spatium dimidium est rectanguli cujus eadem est basis & eadem altitudo cum trochoide vel ejus comite, sumpto axe communi pro altitudine.

IN eâdem rursùs figurâ. Dico spatium quod à comite AVH 10 L & basi ejus AL continetur, dimidium esse rectanguli ACNL, cujus eadem est basis AL & eadem altitudo axis FH. Consideretur enim ipsius rectanguli dimidium ACHF, quod à curvâ AVH ipsius comitis dimidia, in duas partes dividitur, quarum partium altera continetur ab ipsâ curvâ AVH & duabus rectis AF, FH, altera autem pars continetur ab eâdem curva AVH & duabus rectis HC, CA. Ostendendum est duas illas partes esse inter se æquales. Atqui ex antecedenti Propositione facile est ostendere duas easdem partes omnino sibi invicem superponi posse & congruere, posito scilicet puncto C cum puncto F, & rectâ CA cum rectâ FH; item rectâ CH cum rectâ FA: tunc enim quia recta C 11 æqualis est rectæ F 14, congruet punctum 11 cum puncto 14, & recta 11 6 cum recta 14 13, cui æqualis ostensa est; & eodem modo recta A 12 congruet rectæ HD, & recta 12 13 rectæ D 6, cui æqualis ostensa est, & reliquæ reliquis, & omnes omnibus, & spatium spatio congruet. Quare ipsa spatia sunt æqualia, & spatium AVHFA dimidium est rectanguli FC. Idem verò in reliquo rectangulo FN ostendetur eodem modo, ideóque vera est Propositio.

PROPOSITIO QUINTA.



*Idem spatium propor-
tione medium tenet
inter duplum rotæ
& duplum circuli
trochoidi proprii.*

PONANTUR ead-
dem. Dico spa-
tium AVH 10 LA
proportione medium
esse inter duplum ro-
tæ OSZM, & duplum
circuli FIHG trochoi-
di proprii. Intelligan-
tur enim duo rectan-
gula, alterum quidem
20 21, cujus basis 19
20 æqualis sit semicir-
cumferentiæ rotæ O-
SZ, altitudo vero 19
21 æqualis diametro
ejusdem rotæ OZ; al-
terum verò rectangu-
lum 23 24, cujus basis
22 23 æqualis sit semi-
circumferentiæ circu-
li proprii FIH, altitu-
do autem 22 24 æqua-
lis diametro ejusdem
circuli FH. Jam quia
duo rectangula 20 21

& FC æquales habent bases 19 20 & AF (quia utraque basis, ex positis, æqualis est semicircumferentiæ rotæ) erunt ipsa rectangula inter se ut altitudines, scilicet ut diameter rotæ OZ ad FH diametrum circuli proprii. Item, rectangulum FC ad rectangulum 23 24 ejusdem altitudinis FH, ex constructione, se habet ut basis AF ad basim 22 23, idest ut semicircumferentia rotæ OSZ ad semicircumferentiam circuli proprii FIH, quia ex constructione æquales sunt ipsæ bases iisdem semicircumferentiis. Ut autem semicircumferentia OSZ ad semicircumferentiam FIH, ita diameter OZ ad diametrum FH: quare ut rectangulum FC ad rectangulum 23 24, ita diameter OZ ad diametrum FH. Ut autem hæ diametri inter se, ita ostensum est rectangulum 20 21 ad rectangulum FC; ideoque eadem est ratio rectanguli 20 21 ad rectangulum FC, quæ ejusdem rectanguli FC ad rectangulum 23 24, quia utraque ratio eadem est rationi diametri OZ ad diametrum FH. Sed rectangulum 20 21 duplum est rotæ OSZM, ut ex Archimede in circuli dimensionibus deducitur, sicuti rectangulum 23 24 duplum est circuli FIHG & rectangulum FC æquale est spatio proposito AVHLA, quia dimidium dimidio ostensum est æquale per præcedentem. Quoniam ergo continuè proportionalia ostensa sunt rectangula 20 21, FC, & 23 24, patet quoque proportionalia esse spatia ipsis æqualia, scilicet duplum rotæ OSZM, spatium AVH 10 LA, & duplum circuli proprii FIHG, & medium esse spatium AVH 10 LA, ut proponebatur.

Corollarium.

HINC patet idem spatium AVH 10 LA in trochoide rotæ simplicis, duplum esse ejusdem rotæ; in trochoide autem rotæ prolata idem spatium majus esse quàm duplum rotæ; & tandem in trochoide rotæ con-

tractæ, minus quam duplum ipsius rotæ. Nam in rotâ simplici circulus FH ipsi rotæ æqualis est; in prolatâ minor; in contractâ major: unde spatium quod inter duplum rotæ & duplum circuli FH mediam tenet proportionem, in simplici quidem æquale est duplo rotæ; in prolatâ majus quàm duplum; & in contractâ minus.

PROPOSITIO SEXTA.

Quod à trochoide & ejus comite continetur spatium inter lineas principii & medii motûs, æquale est dimidio circuli eidem trochoidi proprii.

IN eâdem figurâ esto spatium ARHVA contentum à dimidio trochoidis ARH, & dimidio comitis ejus AVH inter lineas principii & medii motûs AC, FH. Dico hoc spatium æquale esse semicirculo FIH.

Ducatur enim quæcunque recta YD parallela basi AL, secansque tam spatium quàm semicirculum; & portio quidem ipsius YD intercepta intra spatium, sit YG; portio autem intercepta intra semicirculum, sit XD: manifestum est igitur ex Corollario secundo Propositionis secundæ, portiones ipsas YG & XD esse æquales; quod idem in cæteris similiter ductis basi AL parallelis accidet. Itaque quoniam spatium & semicirculus sunt intra parallelas AF, CH & cujuscvis aliûs rectæ eidem parallelæ, & interjacentis portiones in spatio & in semicirculo interceptæ sunt æquales, sequitur spatium ipsum ARHVA semicirculo FIH esse æquale: quod erat ostendendum.



Corollarium primum.

POTEST simili argumento demonstrari spatium ARYHIFA, quod à dimidiâ trochoide ARH, dimidiâ circumferentiâ HIF, & dimidiâ basi FA continetur, æquale esse spatio AVHFA, quod à dimidiâ comite AVH, diametro HF, & dimidiâ basi FA comprehenditur. Quia scilicet ipsa duo spatia sunt in iisdem parallelis AF, CH : & ductâ quâcunque eisdem intermediâ parallêlâ YD, ostensum est secundâ Propositione portionem YX priori spatio interceptam, æqualem esse portioni 6 D altero spatio comprehensam. Quod idem quia parallelis omnibus interceptis accidit, patet ipsa spatia esse æqualia.

Corollarium secundum.

NEc dissimili argumento probabitur spatium ARHCA, quod à dimidia trochoide ARH, rectâ HC, & rectâ CA continetur, æquale esse spatio AVHIFA, quod à dimidiâ comite AVH, semicircumferentiâ HIF & dimidiâ basi FA comprehenditur; quamvis in rotâ contractâ portio quædam primi horum spatiorum sit ultrâ rectam AC extrâ rectangulum FC; & portio quædam secundi spatii contineatur intra semicirculum FIH; nihilo enim minus fiet demonstratio universalis, sed propter distinctionem rotarum multis verbis opus erit. At veritas hujus propositionis multò facilius ex precedentibus elicitur in rotâ simplici & prolata. Nam quia quartâ Propositione ostensum est spatium AVHCA æquale esse spatio AVHFA; item Propositione sextâ spatium ARHVA ostensum est æquale semicirculô FIH: demptis æqualibus ab æqualibus in rotâ simplici & contractâ, patebit Propositio.

Bbb iij

Corollarium tertium.

IN rotâ simplici quatuor hæc spatia sunt æqualia ARHCA, ARHVA, AVHIFA & semicirculus FIH. Quia enim spatium comitis AVH 10 LA in rotâ simplici ostensum est esse duplum rotæ seu circuli FH, per Propositionem quartam erit dimidium ejusdem spatii, scilicet AVHFA, duplum semicirculi FIH; quare dempto semel ipso semicirculo, relinquitur spatium AVHIFA æquale eidem semicirculo. Cætera manifesta sunt.

PROPOSITIO SEPTIMA.

*Cujusvis trochoidis spatium majus est circulo sibi proprio;
& excessus mediam tenet proportionem inter duplum rotæ
& duplum circuli eidem trochoidi proprii.*

MANIFESTA est Propositio. Nam in eadem figura, spatium trochoidis ARH 25 LA æquale est spatio suæ comitis AVH 10 LA, ac præterea duobus spatiis ARHVA, & L 25 H 10 L, quorum utrumque æquale est semicirculo FIH per sextam Propositionem; ideoque ambo simul ipsi integro circulo FIHG sunt æqualia; ideoque ipsum trochoidis spatium superat circumulum sibi proprium spatium suæ comitis; quod quidem per Propositionem quintam mediam proportionem tenet inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Corollarium.

HINC palam est in rotâ simplici spatium trochoidis triplum esse ejusdem rotæ: quia ipsum continet circumulum sibi proprium, hoc est ipsam rotam semel, ac præterea ejus duplum, scilicet spatium suæ comitis.

AD TROCHOIDEM, EJUSQUE SOLIDA.

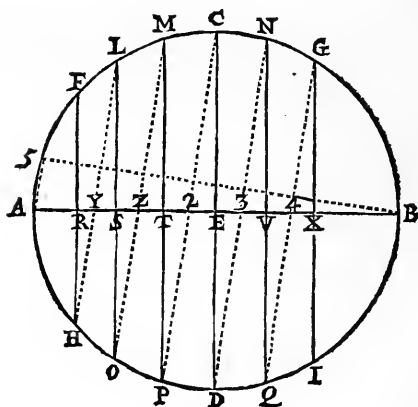
PROPOSITIO LEMMATICA PRIMA.

Esto circulus $ACBD$, cujus diameter AB ; atque ex ejus semicircumferentiâ ACB sumatur arcus quicumque FG , sive is sit diametro AB conterminus, sive non; dividaturque arcus ille in quotlibet partes æquales in punctis F, L, M, C, N, G , &c. indefinitè, quemadmodum in doctrinâ indivisibilium fieri consuevit; ex quibus punctis demittantur in diametrum AB totidem rectæ perpendiculares FR, LS, MT, CE, NV, GX , &c. quæ erunt totidem sinus recti numero indefiniti & secundum arcus æquales, vel æqualiter sese excedentes sumpti. Proponitur demonstrandum,

Omnes illos sinus indefinitè sumptos ad radium circuli toties sumptum sic se habere, ut recta RX , portio scilicet diametri inter extremos sinus intercepta, ad arcum propositum FG .

PRODUCANTUR enim sinus illi, donec alteri semicircumferentiæ ADB occurrant in punctis H, O, P, D, Q, I , &c. & jungantur alternatim rectæ LH, MO, CP, ND, GQ , &c, occurrentes diametro AB in punctis $Y, Z, 2, 3, 4$, &c. & ductis omnium arcuum subtentis $FL, LM, MC, CN; HO, OP, PD, DQ$, &c. fiant triangula rectangula similia HRY, LSY, OZS ,

MTZ, PT₂, CE₂, &c. ac tandem sumpto arcu A₅, qui æqualis sit uni ex arcubus æqualibus, putà arcui FL; jungantur rectæ A₅, & B₅, ut fiat triangulum rectangulum A₅ B prædictis HRY, &c. simile. Itaque propter triangulorum similitudinem, facile est colligere omnes subtensas intermedias LO, MP, CD, NQ, &c. simul sumptas, unà cum dimidiis extremarum, putà unà cum HR, & GX ad rectam B₅ eandem rationem ha-



bere, quam recta RX ad rectam A₅. Atqui ex doctrinâ indivisibilium, & propter infinitam arcuum æqualium multitudinem & parvitatem, omnes prædictæ subtensæ simul sumptæ unà cum HR & GX, sumi possunt pro duplo omnium sinuum prædictorum indefinitè sumptorum, dempto eorum uno; sicuti recta B₅ pro diametro seu duplo radii, & recta A₅, pro arcu A₅, sive FL. Ut ergo duplum omnium sinuum indefinitè sumptorum dempto

dempto uno, ad duplum radii; ita recta RX ad arcum FL ; sumptisque duorum priorum terminorum dimidiis, erunt omnes sinus indefinitè sumpti, dempto uno, ad radium, ut RX ad FL . Verùm tot sunt sinus, dempto uno, quot arcus; ergò sumptis consequentium æquemultiplicibus in præcedenti proportionē, erunt omnes sinus, dempto uno, ad radium toties sumptum, ut recta RX , ad omnes arcus minores; hoc est ad arcum FG . Sed in doctrina indivisibilium, unicus sinus additus ad alios numero indefinitos, nihil mutat; unde patet Propositio: quippe omnes sinus ad radium toties sumptum eandem rationem habebunt, quàm recta RX ad arcum FG .

Corollarium primum.

SI ergo arcus assumptus FG , sit semicircumferentia ipsa, ad quam pertineat diameter AB , quæ hoc casu referet rectam RX ; patet omnes sinus rectos ad semicircumferentiam pertinentes atque secundum æquales arcus indefinitè sumptos, esse ad radium toties sumptum, ut diameter ad semicircumferentiam. Hic autem in demonstratione, quia extremi sinus evanescent, nihil demendum erit nec addendum: in universum tamen additio aut subtractio finiti alicujus determinati, in doctrinâ indivisibilium nihil mutat.

Corollarium secundum.

SI autem arcus FG sit quadrans diametro AB conterminus; tunc radius referet rectam RX ; atque ita omnes sinus recti ad quadrantem pertinentes, & secundum æquales arcus sumpti, erunt ad radium toties sumptum, ut radius ad quadrantem.

Corollarium tertium.

AT si arcus FG sit quidem diametro AB conterminus, sed quadrante major aut minor; tunc recta KX erit sinus versus ipsius arcûs. Ut ergo omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus versus ad arcum.

Corollarium quartum.

SI arcus FG diametro AB non sit conterminus, idem autem ita constitutus sit, ut alterutrum punctorum R vel X sit centrum circuli, quo pacto alteruter sinuum extremorum FR vel GX erit radius; tunc recta RX æqualis erit sinui recto ejusdem arcûs: quapropter, ut omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus rectus arcûs ad ipsum arcum.

Corollarium quintum.

IN casu quarti Corollarii. Si centrum circuli sit inter puncta R, X; tunc recta RX componetur ex duobus sinibus rectis duarum portionum arcûs FG. Ut ergò se habet summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita summa duorum sinuum rectorum, qui ad duas portiones arcûs FG pertinent, se habebunt ad eundem arcum.

Corollarium sextum.

IN eodem casu, si centrum cadat ultrà puncta R, X; tunc recta RX erit differentia duorum sinuum rectorum, vel etiam duorum sinuum versorum, qui sinus recti vel versi pertinebunt ad duos arcus quorum differe-

rentia erit arcus ipse FG. Itaque, ut summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita differentia illa sinuum ad ipsum arcum FG.

Corollarium septimum.

QUONIAM autem omnes sinus recti differunt à radio toties sumpto, per omnes sinus versos; sumptis differentiis pro antecedentibus, erunt omnes sinus versi ad radium toties sumptum, ut differentia inter rectam RX, & arcum FG, ad ipsum arcum FG. Undè rursus sex Corollaria, sex præmissis respondentia facillè deducuntur, quorum quæ ad quartum pertinebit conclusio talis erit, Ut omnes sinus versi ad radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum & ipsum arcum, ad ipsum eundem arcum.

PROPOSITIO LEMMATICA SECUNDA.

Ex prædictis facillè est examinandis sinuum Tabulis perutilem hanc Propositionem demonstrare.

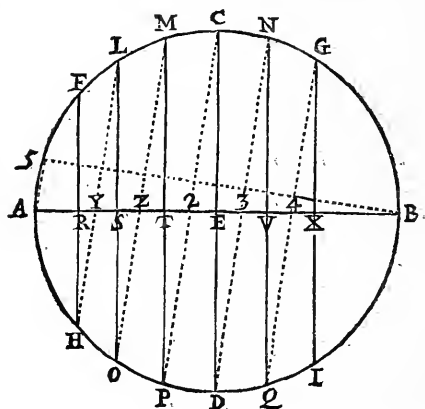
Si in circumferentiâ circuli sumantur duo quicunque arcus FM, CG; & reliqua ponantur ut in primâ Propositione, omnes sinus recti ex arcu FM demissi, atque indefinitè sumpti, putà FR, LS, MT &c. ad omnes sinus rectos ex arcu CG demissos atque indefinitè sumptos, putà CE, NV, GX &c. (modò tamen singuli ex minoribus arcubus FL, LM, &c. æquales sint singulis ex minoribus arcubus CN, NG, &c. sive multitudo horum æqualis sit multitudini illorum, sive non) erunt, ut recta RT extremis sinibus intercepta, ad rectam EX extremis sinibus interceptam.

NAM ex prima Propositione, Ut omnes sinus FR, LS, MT, &c. ad radium toties sumptum; ita recta RT ad arcum FM. Ut autem radius ille toties sumptum

tus ad eundem radium toties sumptum, quot in majori arcu CG continentur minores, ita arcus integer FM ad arcum integrum CG : & ut radius toties sumptus quot in arcu CG continentur minores ad totidem sinus CE, NV, GX; ita arcus CG ad rectam EX : ergo ex æquo in quatuor terminis utrinque, Ut omnes sinus FR, LS, MT, & ad omnes sinus CE, NV, GX, &c. ita recta RT, ad rectam EX.

Corollarium primum.

HINC licet Tabulas sinuum per quoscunque arcus commensurabiles examinare hâc ratione. Est o ar-



cus FM triginta graduum, arcus vero CG quadraginta graduum; sintque in utroque arcu dati extremi sinus ex Tabulis, puta FR, MT, CE, GX; tum reliqui inter-

medii per singula minuta prima, vel etiam secunda, si libuerit: unde ex iisdem Tabulis dabuntur etiam rectæ RT, EX. Quoniam ergo numerus sinuum utrinque finitus est atque determinatus, ex summâ omnium priorum sinuum FR, LS, MT, &c. dematur dimidium extremorum FR, MT; tum ex summâ posteriorum CE, NV, GX, &c. dematur dimidium extremorum CE, GX; eritque tunc residuum priorum ad residuum posteriorum, ut recta RT, ad rectam EX; quod nisi ita reperiatur, erroneæ erunt Tabulæ. Erit tamen error ferendus, donec excessus aut defectus minor erit dimidio illius numeri qui exprimit multitudinem omnium sinuum in utroque arcu contentorum.

Corollarium secundum.

QUOD si proponatur arcus FG, ita dividendus in duos arcus FM, MG, ut demissis sinibus rectis FR, LS, &c. quemadmodum supra, summa omnium sinuum indefinitè sumptorum qui ad arcum FM pertinebunt, ad summam omnium qui ad arcum MG pertinebunt, rationem habeant datam; dividenda erit recta RX in ratione datâ, putâ in puncto T, atque ab eo excutanda perpendicularis TM usque ad circumferentiam; & factum erit, ut patet ex præmissâ secunda Propositione.

Hic multa theoremata & problemata præmissis similia proponi possent, quæ, quia facilia sunt nihilque ad nostrum institutum conducunt, consultò omittimus.

Ad primum, sequens notandum.

IN figurâ rotæ atque trochoidis sequentis, ut pateat trilineum AMHG æquale esse quadrato semidiametri rotæ AG, adverte rectam GH quadrantem circum-

ferentia æqualem esse quæ recta GH, si in quocunque partes æquales indefinitè secetur, & à singulis sectionis punctis excitentur perpendiculares usque ad curvam AMH, exhibebunt ipsæ perpendiculares omnes sinus rectos quadrantis diametro contermini secundum æquales arcus sumptos, ex naturâ trochoidis ejusdemque sociæ: quare per secundum Corollarium Propositionis primæ præmissæ, erunt illi omnes sinus simul sumpti ad radium AG toties sumptum, ut radius AG ad quadrantem GH. Ut autem summa illorum sinuum ad summam radiorum, ita trilineum AMHG ad rectangulum AH, ex doctrinâ indivisibilium; & ut radius AG ad quadrantem GH, ita quadratum ipsius AG ad rectangulum AH; ideoque ut trilineum AMHG ad rectangulum AH, ita quadratum AG ad idem rectangulum AH; unde trilineum ipsum AMHG æquale est quadrato semidiametri AG.

Quoniam autem trilineum reliquum AMHV est differentia inter trilineum AMHG & rectangulum AH; illud ergo AMHV æquale erit differentia inter quadratum AG & rectangulum AH; hoc est rectangulo contento sub semidiametro AG & differentia inter ipsam AG & quadrantem GH.

Ad secundum, sequens notandum.

BILINEUM AMHZA est manifestò differentia inter triangulum AGHZA sive quadrantem rotæ, & trilineum AMHG sive quadratum semidiametri AG.

De Rotâ simplici quedam notanda.

I. **Q**UOD sub semidiametro rotæ & quadrante itineris centri ejusdem comprehenditur rectangulum, à sociâ trochoidis sic dividitur, ut portio ma-

jor æqualis sit quadrato semidiametri rotæ; altera autem portio, eademque minor æqualis sit rectangulo contento sub semidiametro rotæ & differentiâ quæ est inter eandem semidiametrum & quadrantem circumferentiæ ipsius rotæ.

II. Quod à quartâ parte sociæ trochoidis & à rectâ quæ quartâ ipsius extrema conjungit clauditur spatium bilineum, æquale est differentiæ inter quadrantem rotæ & quadratum semidiametri ejusdem.

III. Propositâ trochoide ejusque sociâ, atque utriusque plano circa communem basim circumvoluto, fit solidum trochoidis circa basim, quod quidem ad cylindrum cui inscribitur hâc ratione comparabitur.

Portio solidi comprehensa inter duas superficies, quarum altera à trochoide, altera ab ejus sociâ describitur, æqualis est cylindro cujus basis sit rota ipsa, altitudo autem æqualis circumferentiæ ipsius rotæ; quoniam idem æquale est annulo stricto ejusdem rotæ; ac proinde portio illa, totius cylindri circumscripti quarta pars est.

Portio solidi quæ unicâ superficie continetur, scilicet eâ quæ à sociâ trochoidis describitur, commodè conferri potest cum cylindro cujus axis sit idem cum axe solidi trochoidis; semidiameter verò basis sit semidiameter rotæ: reperietur autem talis portio æquari tali cylindro, ac prætereâ quadruplo illi solido quod fit ex conversione majoris illius trilinei, quod primo notando diximus æquari quadrati semidiametri rotæ, si scilicet tale trilineum circa iter centri rotæ convertatur. At ultimus hic cylindrus totius cylindri circumscripti quarta pars est; solidum autem ex conversione trilinei, ejusdem totius trigesima secunda pars evadit; quia omnia quadrata ipsius trilinei æqualia sunt omnibus quadratis omnium sinuum rectorum quadrantis rotæ secundum æquales arcus sumptorum, quæ omnia quadrata quadrati semidiametri toties sumpti dimidia sunt; & hoc

quadratum semidiametri toties sumptum est decima sexta pars omnium quadratorum parallelogrammi circumscripti circa trochoidem : hoc ergo solidum quater sumptum octavam totius cylindri circumscripti partem constituit : tandem ergo sequitur totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituere $\frac{1}{8}$.

Vel aliter hoc idem solidum quod à trochoidis sociâ circa ejusdem basim circumvolutâ describitur, ad totum cylindrum sic comparabitur. Quoniam planum, ex cujus conversione circa basim trochoidis fit tale solidum, ad rectangulum ipsi circumscriptum, ex cujus conversione fit totus cylindrus se habet ut summa omnium sinuum versorum secundùm æquales arcus sumptorum, ad diametrum toties sumptum; erit solidum ad cylindrum, ut summa omnium quadratorum ab omnibus sinibus versis secundùm æquales arcus sumptis, ad quadratum diametri toties sumptum. At hæc ratio est ut 3 ad 8, & additâ quartâ parte totius cylindri, hoc est annulo stricto de quo supra; fit ut totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituat, ut priùs.

Et quidem ejusmodi ratio $\frac{1}{8}$ de quâ jam egimus, geometricè vera est, ac prorsùs accurata. At circa solidum quod fit ex conversione trochoidis circa axem, eadem certitudo non contingit, nec potest, nisi inventa fuerit ratio diametri rotæ ad ejus circumferentiam.

Neque etiam movemur quod Evangelista Torricellius asserat tale solidum ad suum cylindrum (qui scilicet altitudinem habeat axem trochoidis, at diametrum basis ejusdem trochoidis) rationem eandem habere quam undecim ad octodecim; hæc enim ratio $\frac{11}{18}$ minor est quàm vera.

Ad hoc autem admittatur rursùs sociâ trochoidis, cuius

eius beneficio solidum trochoidis dividetur in alia duo solida. Primum duabus superficiebus curvis continebitur, eâ scilicet quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus fociâ describitur. Secundum vero, circulo basis & eâ superficie curva terminabitur, quæ à fociâ trochoidis describetur. Ratione autem initâ secundum Geometriæ regulas, primum solidum continebit quartam partem totius cylindri, ac præterea sphaeram rotæ, quæ ad ipsum cylindrum se habet ut sexta pars quadrati diametri ad quadratum semicircumferentiæ: secundum autem solidum continebit ejusdem totius cylindri partem quartam, ac præterea portionem quandam quæ junctâ sphaeræ rotæ ad totum cylindrum se habebit, ut differentia inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum ipsius semicircumferentiæ.

Ponatur radius partium

æqualium	3000000	
Erit semicircumferentia	9424778	paulo major.
Quadratum semicircumferentiæ	8882643960	paulo minus.
$\frac{1}{4}$ ejusdem quadrati	2220660990	minus.
$\frac{4}{3}$ quadrati diametri	4800000000	
Differentia hujus & quadrati semicircumf.	4082643960	
$\frac{1}{4}$ hujus differentia	1020660990	}
Semiquadratum semicircumferentiæ	4441321980	
Summa duorum ultimarum numerorum	5461982970	
Erit numerator rationis solidi ad totum cylindrum, cuius denominator quadratum semicircumferentiæ.		

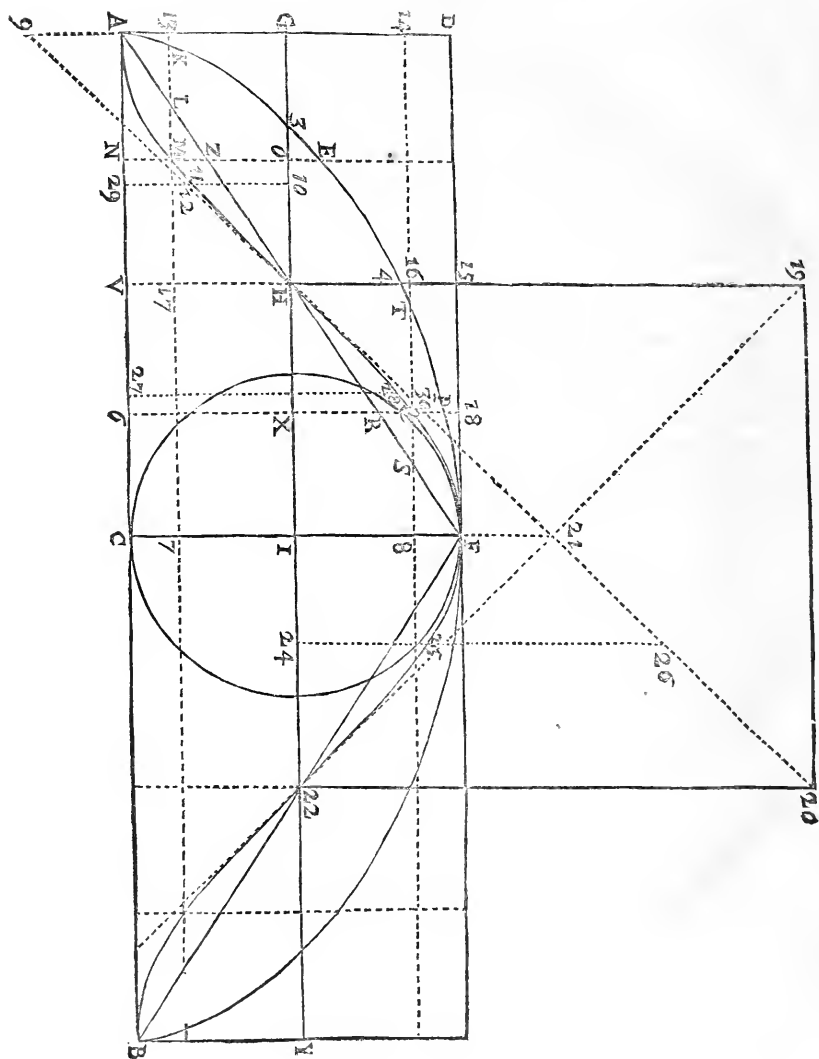
Ratio Torricellii quadrati semicircumferentiæ
ejusdem quadrati

$$5428282420 \frac{11}{13} \text{ seu } \frac{44}{72}$$

$$5551652475 \frac{5}{8} \text{ seu } \frac{41}{72}$$

Rec. de l'Acad. Tom. VI.

Ddd



Patet ergo rationem majorem esse eâ quæ à Torricellio assignatur; minorem tamen eâ quæ suprà assignata est pro solido circa basim, quæ est $\frac{1}{8}$.

AK₃E₄TPFB est trochoides : AMHQFB est ejusdem trochoidis focia : G₃OHXIY est iter centri : C₇-I₈F est axis : ANV₆CB est basis : F vertex : DB parallelogrammum circumscriptum; & ductæ sunt rectæ ALZHRSE, & BF : item ductæ sunt quæcunque rectæ NMZOE, VH₄, & PQRX 6 axi parallelæ; ac tandem quæcunque rectæ 13 KLM₇, & 14TQS₈ parallelæ basi.

Itaque pro solido circa basim, patet illud esse ad cylindrum circumscriptum, ut omnia quadrata NE, V₄, 6P, CF, &c. in infinitum, ad totidem quadrata CF. Verum quadratum NE æquale est quadratis NM, ME, & duplo rectangulo NME; sicuti quadratum V₄ æquale est quadratis VH, H₄, & duplo rectangulo VH₄; & quadratum 6P æquale est quadratis 6Q, QP, & duplo rectangulo 6QP, & sic de reliquis. Ex illis autem, quadrata NM, VH, 6Q, CF & similia, sunt quadrata omnium sinuum versorum secundum æquales arcus sumptorum, quæ simul constituunt $\frac{1}{8}$ quadratorum diametri CF, & eadem constituunt rationem solidi focia trochoidis ad cylindrum: hæc ergo ratio est $\frac{3}{8}$. Reliqua quadrata ME, H₄, QP, &c. unâ cum duplis rectangulis NME, VH₄, 6QP, &c. ad quadrata CF collata efficiunt rationem quam habet ad eundem cylindrum duplus annulus qui fit ex figurâ AMHQFP₄EA circa basim AB circumvolutâ, qui duplus annulus æqualis est annulo rotæ circa basim AB circumvolutæ, hoc est cylindro cujus basis sit rota, altitudo autem circumferentia rotæ, sive basis AB, qui cylindrus constituit $\frac{2}{8}$ totius cylindri. Quare solidum rotæ ad totum cylindrum constituit rationem $\frac{1}{4}$.

Ddd ij

Aliter pro solido quod fit à trochoidis fociâ. Omnia quadrata NM, ab A usque ad VH æqualia sunt omnibus quadratis NO, OM, minùs omnibus duplis rectangulis NOM. Item ab VH usque ad CF omnia quadrata 6Q æqualia sunt omnibus quadratis 6X, XQ, plus omnibus duplis rectangulis 6XQ: verum hæc dupla rectangula 6XQ æqualia sunt illis NOM, omnia scilicet omnibus; existentibus ergo contrariis signis plus & minùs, elidunt se invicem hæc & illa dupla rectangula, remanentque omnia quadrata NM, 6Q, æqualia omnibus NO, OM, 6X, XQ: horum autem NO, 6X, sunt quadrata semidiametri, quæ constituunt quartam partem quadratorum totius diametri CF, sive $\frac{1}{4}$. At quadrata OM, XQ, sunt quadrata omnium sinuum rectorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ ideò constituunt dimidiam partem omnium quadratorum semidiametri, sive octavam partem quadratorum totius diametri. Patet ergo omnia quadrata NM, 6Q, constituere $\frac{3}{8}$ & $\frac{1}{8}$, hoc est $\frac{1}{2}$ omnium quadratorum totius diametri CF, quæ eadem est ratio solidi quod fit à fociâ trochoidis, ad cylindrum eidem circumscriptum; putà ratio omnium quadratorum NM, 6Q ad omnia quadrata CF.

Pro solido autem circa axem CF, admisâ rursùs fociâ trochoidis in eadem figurâ, manifestum est illud dividi in alia duo solida, quorum alterum instar annuli stricti terminatur duabus superficiebus, eâ nempe quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus fociâ describitur: alterum autem solidum duabus etiam superficiebus comprehenditur; eâ nempe quæ à fociâ trochoidis gignitur, & eo circulo cujus semidiameter est recta CA.

Ac primum quidem solidum ad totum cylindrum collatum, eam habet rationem quam omnia simul quadrata MK, H 3, QT, & similia, unà cum omnibus duplis

rectangulis $7MK$, IH_3 , $8QT$, & similibus, ad quadratum AC toties sumptum. At dupla illa rectangula æquivalent semel omnibus rectangulis sub 71_3 sive CA & MK ; sub IG sive CA & H_3 ; sub 81_4 sive CA & QT ; (propterea quod omnes rectæ $7M$, IH , $8Q$, &c. bis sumptæ æquivalent omnibus rectis 71_3 , IG , 81_4 , &c. semel sumptis, hoc est rectæ CA toties sumptæ) & hæc rectangula constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, sicuti omnes rectæ MK , H_3 , QT , constituunt $\frac{1}{4}$ rectæ CA toties sumptæ. Omnia autem quadrata MK , H_3 , QT , &c. ad quadratum CA toties sumptum eandem rationem habent quam sphaera rotæ ad totum cylindrum, hoc est, quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri rotæ ad quadratum CA , sive quam $\frac{1}{3}$ trilinei $HQFI$ seu $AMHG$ quadrato IF seu IC æqualis, ad quadratum CA . Patet itaque primum solidum continere quartam partem totius cylindri, ac præterea portionem aliquam quæ ad ipsum totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ.

Jam ad secundum solidum. Manifestum quidem est illud ad totum cylindrum sic se habere ut omnia quadrata CA , $7M$, IH , $8Q$, &c. ad quadratum CA toties sumptum. Hæc autem ratio ut detegatur, adverte omnia illa quadrata æqualia esse omnibus quadratis DF , 1_4Q , GH , 1_3M , &c. quia singula singulis æqualia sunt ex natura trochoidis. Itaque si hæc & illa quadrata simul cum quadrato AC toties sumpto conferantur, res expedietur. Vide aliam demonstrationem secundi hujus solidi in Appendice quæ postea sequetur.

At hoc jam confectum est in universum in omni parallelogrammo quale est $ACFD$, ductâ primò utunque lineâ qualis est socia $AMHQF$ constituyente duo trilinea primæ divisionis $AHFC$, & $FHAD$: rum ductâ

secundò rectâ VH 4 15, quæ & latera AC , DF , & parallelogrammum simul bifariam dividat, secetque lineam ipsam $AMHQF$ utcumque in H , ita ut constituentur duo trilinea secundæ divisionis $AMHV$, & HQF 15, & duo reliqua quadrilinea; si insuper intelligamus rectam AC dividi tertiò in quocumque partes æquales in infinitum, ex doctrinâ indivisibilium, & per puncta divisionis ductas esse rectas ipsi CF parallelas, quæ parallelogrammum dividant in totidem partes æquales, sed & lineam $AMHQF$ in totidem punctis: constituent ergo ipsæ rectæ intra trilinea secundæ divisionis $AMHV$, HQF 15, multa alia minora trilinea tertiæ divisionis; tot scilicet intra singula quot partes æquales in singulis rectis AV , F 15, continentur. Puta si rectâ AV tertiâ divisione in 1000 partes æquales dividatur, constituentur 1000 trilinea tertiæ divisionis quorum maximum erit ipsum $AMHV$; & omnia communem habebunt apicem A ; ac minimum quidem trilineum assumet ex rectâ AV primam partem ad A terminatam; sequens autem assumet duas priores partes ad idem A terminatas; tertium tres; quartum quatuor, & sic eodem ordine usque ad maximum; eritque forsan unum ex intermediis AMN . Sic intra trilineum HQF 15 totidem constituentur minora trilinea tertiæ divisionis quorum unum ex intermediis erit forsan F 18 Q . Præterea ex rectis CA , 7 13, IG , 8 14, FD , &c. quædam portiones intra prædicta trilinea secundæ divisionis continentur: putà intra $AMHV$; portiones AV , M 17, &c. intra HQF 15 verò, portiones F 15, Q 16, &c. atque ex doctrinâ indivisibilium demonstratur horum omnium portionum quadrata simul sumpta dupla esse omnium prædictorum trilineorum tertiæ divisionis simul sumptorum.

Hoc posito, illud inquam jam confectum est ex doctrinâ indivisibilium, diviso triplici divisione quovis

parallelogrammo CD, ut dictum est, sive prima divisio fiat in partes æquales, ut hîc, sive non; omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea AHFC, & FHAD primæ divisionis pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15; hoc est quadruplum omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis, quæ in iisdem AMHV, HQF 15 comprehenduntur, ut suprâ. Omnia enim quadrata omnium portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. simul sumpta dupla sunt omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis quæ in ipsis AMHV, HQF 15 comprehenduntur: hoc autem ex doctrina indivisibilium demonstramus in secunda Propositione Appendicis quæ postea sequetur. Et hoc quidem in universum in omni parallelogrammo: at hîc in specie trilinea quidem AHFC, & FHAD primæ divisionis æqualia sunt; sicuti æqualia sunt quoque AMHV, & HQF 15 secundæ divisionis: quare sumptis tantum AHFC, & AMHV quæ constituunt dimidiam partem omnium quatuor; tunc quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. quæ pertinent ad secundum solidum de quo agitur, constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, ac præterea quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo AMHV comprehensorum.

Si itaque hæc quarta pars cum eâ quartâ quæ ex primo solido inventa est, jungatur, habebimus solidum rotæ constituere dimidium sui cylindri, ac præterea duas portiones, quarum altera ad eundem cylindrum sic se habet ut $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG ad quadratum AC, ut suprâ: altera autem ad eundem cylindrum sic se habet ut qua-

druplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in AM, HV comprehensorum, ad idem quadratum AC toties sumptum quot sunt rectæ CA, 7M, IH, 8Q, &c.

Supereſt ergò ut oſtendamus duas illas portiones ſimul junctas, ad totum cylindrum eandem rationem habere, quam differentiam inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum ſemicyrcumferentiæ : & quidem de $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG nulla erit difficultas; de quadruplo autem trilineorum, ſic patebit.

Producatur recta DGA verſus A uſque in 9, ita ut recta G 9, ſit æqualis rectæ GH, hoc eſt quadrantis circumferentiæ rotæ; & jungatur recta 9 H, hæc cadet extra trilineum AMHG, & cum curvâ AMH conſtituet ad punctum H angulum minorem omni angulo rectilineo, etiamſi producta ſecet eandem curvam AHM. QF in ipſo puncto H, in quo, tali ſectiõne, conſtituentur duo anguli ad verticem oppoſiti æquales, ac ſinguli minores quovis angulo rectilineo; quod tamen hic parum refert: ſufficit enim quod recta 9 H cadat extra trilineum AMHG; hoc autem ſic oſtendimus.

In ipſâ 9 H ſumatur quodvis punctum 12 ex quo ducatur recta 12 10 parallela ipſi AG atque occurrens rectæ GH in puncto 10, curvæ autem AMH occurrat ipſa 12 10 producta, ſi opus ſit, in puncto 11; itaque recta 10 12 æqualis eſt rectæ 10 H, recta autem 10 H æqualis eſt arcui cuidam quadrante minori, cujus ſinus rectus erit recta 10 11 ex naturâ ſociæ trochoidis; quare 10 11 minor eſt quàm 10 H ſive quàm 10 12: unde punctum 12 eſt extra trilineum AMHG, quod idem de omnibus punctis rectæ 9 H oſtendetur. Quoniam autem trilineum HQF 15 ſecundæ diviſionis, & omnia minora trilinea tertiæ diviſionis in eo contenta, trilineo AMHU ſecundæ diviſionis, & omnibus trili-

ncis

neis tertiæ divisionis in eo contentis singula singulis ordine sumptis, æqualia sunt : quod de his ostendetur, de illis quoque verum erit.

Sumatur ergo QF 18 trilineum quodvis tertiæ divisionis assumens ex rectâ F 15, rectam F 18 quocunque partium æqualium ex iis in quas divisæ sunt rectæ CA, FD ; tum rectæ F 18 sumatur æqualis ex HG recta H 10, ducaturque recta 10 11 12, ut supra. Est igitur F 18, sive H 10, sive 10 12 æqualis cuidam arcui cujus sinus versus est 18 Q ; sinus autem rectus est 10 11, ex naturâ sociæ trochoidis ; quare recta 11 12 est differentia inter arcum & ejusdem arcûs sinum rectum : & trilineum quidem QF 18 ad parallelogrammum FX sic se habet, ut omnes sinus versi omnium arcuum æqualium minorum tertiæ divisionis in arcu F 18 contentorum, ad radium IF toties sumptum, quot in arcu F 18 continentur arcus minores ejusdem tertiæ divisionis, ex doctrinâ indivisibilium. Ut autem omnes illi sinus versi ad omnes illos radios, ita recta 11 12 differentia arcus F 18 & sui sinus recti, ad arcum F 18, ex Corollario septimo Propositionis præmissæ : quia recta F 18 refert arcum, cujus sinus rectus est 10 11, & differentia inter hunc sinum & ipsum arcum F 18, sive 10 12, est 11 12 ; atque insuper alter sinuum ab extremitatibus arcûs F 18 cadentium, puta sinus FI cadit in centrum : quare trilineum QF 18 est ad parallelogrammum FX, ut recta 11 12 ad rectam F 18 ; sed parallelogrammum FX ad parallelogrammum FH se habet ut recta F 18 ad rectam F 15 : quare ex æquo, ut trilineum QF 18 ad parallelogrammum FH, ita recta 11 12 ad quadrantem F 15 sive GH.

Cùm ergo idem de singulis trilineis tertiæ divisionis verum sit, quod de QF 18 jam demonstratum est ; sequitur omnia illa trilinea simul sumpta ad parallelogram-

num FH toties sumptum sic se habere, ut omnes differentia inter omnes sinus rectos secundum æquales arcus sumptos, & suos arcus, ad quadrantem G 9 toties sumptum. Ut autem hæ omnes differentia ad omnes quadrantes, ita trilineum AMH 9, quod differentias illas omnes continet, ad quadratum quadrantis G 9, quod omnes illos quadrantes continet, ex doctrinâ indivisibilium: quare argumentis ex arte institutis quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo HQ-E 15, sive in trilineo AMHV contentorum, erit ad octuplum parallelogrammi FH toties sumpti quot sunt trilinea in AMHV, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadruplum quadrati quadrantis G 9, sive ut duplum trilinei ipsius AMH 9 ad quadratum semicircumferentiæ AC. At octuplum prædictum æquale est omnibus quadratis CA, 7 13, IG, 8 14, &c. ex doctrina indivisibilium; quia tam ex octuplo illo, quàm ex omnibus his quadratis, constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempe quod basim habet parallelogrammum AF, altitudinem autem rectam AC: sive, quod idem est, quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF.

Itaque quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo AMHV contentorum, ad omnia quadrata CA, 7 13, IG, 8 14, &c. sic se habet, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadratum AC. Ut autem quadruplum illud ad omnia quadrata semicircumferentiarum, ita erat una ex duabus portionibus reliquis solidi rotæ, ad totum cylindrum. Ut ergo talis portio ad cylindrum, ita duplum trilinei AMH 9 ad quadratum AC; sed & altera portio erat ad eundem totum cylindrum ut $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH 9 ad quadratum AC; sed $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH 9 simul differunt à quadrato quadrantis G 9.

tanto spatio quantum est $\frac{4}{3}$ ipsius trilinei AMHG; (patet, ex eo quod triangulum H G 9 sit dimidium ipsius quadrati G 9.) Constat ergo propositum, nempe duas illas portiones reliquas ad totum cylindrum sic se habere, ut differentia inter quadratum quadrantis & $\frac{4}{3}$ trilinei AMHG, quod quadrato radii æquale est, ad quadratum semicircumferentiæ.

Nota.

EX iis quæ exposita sunt de rotâ simplici, atque solidis quæ ab illius trochoide gignuntur, non difficile erit rotas alias tam prolatas quàm contractas contemplari: eadem enim in illis quàm in simplici valebit methodus, eademque vigeant argumenta, sed conclusiones erunt diversæ propter diversas rationes altitudinis cujuscumque trochoidis ad suam basim. Nos tamen iis præmissis nec absolutis, sed rudi tantum minervâ exaratis ne memoriâ exciderent, supersedebimus, donec operi extremam manum imponere per tempus licebit. Tunc autem & centra gravitatis tam plani trochoidis, quàm ejus sociæ, examini subjicientur, ac detegentur.

A P P E N D I X

Ad solidum trochoidis circa axem conversæ, continens aliam demonstrationem secundi solidi duorum illorum ex quibus totum componitur, putà illius quod à sociâ circa axem conversâ describitur.

AD hoc autem præmissis duabus Propositionibus Lemmaticis, illarumque Corollariis, accedant quæ sequuntur.

Ecc ij

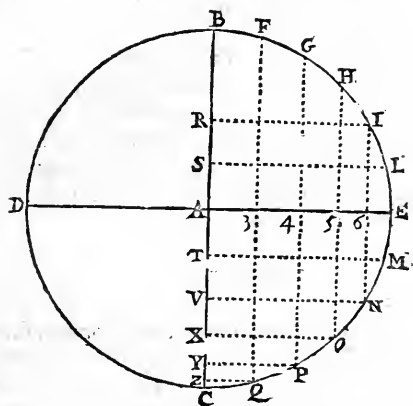
Corollario quidem septimo præcedenti demonstratum est in arcubus quadrante non majoribus, sic esse omnes sinus versos ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum & ipsius arcum ad ipsum eundem arcum. Hic verò demonstrabimus idem quoque verum esse de arcubus quadrante majoribus.

PROPOSITIO PRIMA.

Esto circulus cujus centrum A , diametri BC , DE ad rectos angulos sese secantes, ita ut BEC sit semicircumferentia divisa in duos quadrantes BE , CE , qui in quolibet arcus æquales indefinitè dividantur in punctis B , F , G , H , I , L , E , M , N , O , P , Q , C , &c. atque sumatur arcus quivis IEC quadrante major, & à punctis divisionis illius demittantur in diametrum BC perpendiculares IR , LS , EA , MT , NV , OX , PY , QZ , &c. ut habeantur omnes sinus versi CZ , CY , CX , CV , CT , CA , CS , CR , &c. ad arcum IC pertinentes: sinus autem rectus arcus IEC erit IR . Dico ergo sic esse omnes illos sinus versos ad radium AB toties sumptum, ut differentia inter sinum RI & suum arcum IEC ad ipsum eundem arcum.

DEMITTANTUR in diametrum DE sinus recti F_3 , G_4 , H_5 , I_6 , &c. qui pertinent ad divisiones arcus BI quadrante minoris ac semicircumferentiam perficientis. Itaque ex quarto Corollario, ut omnes sinus recti BA , F_3 , G_4 , H_5 , I_6 , &c. ad radium toties sumptum, ita sinus IR ad arcum IB . Ut autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IB , ad ipsum radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC , ita arcus IB ad ipsum arcum IC : ergo ex æquo in tribus terminis, ut summa sinuum

BA, F₃, G₄, H₅, I₆, &c. ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ita sinus IR ad arcum IC; & sumptis differentiis pro antecedentibus, ut differentia inter summam sinuum rectorum BA,



F₃, G₄, H₅, I₆, &c. radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ad ipsum radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum IR & sinum arcum majorem IC, ad ipsum eundem arcum. Verum differentia illa summæ sinuum & summæ radiorum æqualis est summæ sinuum versorum prædictorum, ut statim demonstrabimus: itaque constat Propositio.

Lemma.

QUOD autem assumptum est, hoc ita demonstratur. Ex quadrante EC sumatur arcus NC æqualis arcui IB, & demittantur in diametrum DE sinus recti
Ecc iij.

Q₃, P₄, O₅, N₆, &c. qui æquales erunt ipsis F₃, G₄, H₅, I₆, &c. illis autem ex radio AC toties demptis, remanent manifestò sinus versu CZ, CY, CX, CV: superest autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IN; sed hic perficit sinus versos reliquos CT, CA, CS, CR: nam radius bis sumptus perficit duos sinus versos CV, CR; & idem radius rursus bis sumptus perficit duos sinus versos CT, CS; sinus autem versus CA est idem radius. Reliqua patent. Nec aliquem moveat quod idem sinus versus CV bis assumptus est: ille enim cum sit magnitudo quadam determinata, semel tantum; plusquam par est, sumpta, atque indefinitis numero magnitudinibus addita, nihil officit in doctrinâ indivisibilem.

Corollarium.

QUONIAM ergo in omni arcu, omnes sinus versu sunt ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum ipsius arcus, & arcum eundem ad ipsum arcum; ut autem radius toties sumptus ad eundem radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ: ita arcus propositus ad ipsam semicircumferentiâ. Patet ex aquo in tribus terminis omnes sinus versos arcus propositi, ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ, eandem rationem habere, quam differentia inter sinum rectum arcus propositi & ipsum arcum, ad integram semicircumferentiâ.



PROPOSITIO SECUNDA.

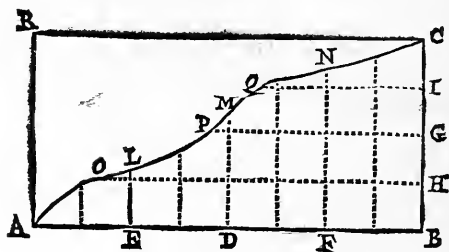
*Est*o trilineum quodcunque ABC , cujus duo ex lateribus puta AB , BC , sint lineæ rectæ, tertium verò AC utcunque rectum vel curvum; modo ipsum tale sit ut procedendo secundum ipsum à puncto A ad punctum C , idem fiat continuò propius ac propius rectæ BC ; remotius autem ac remotius à rectâ AB : ut sic nec rectâ AB , nec BC , nec quævis iisdem parallela, ipsi lineæ AC duobus in punctis occurrere possit. Perficiatur autem parallelogrammum $ABCR$; atque intelligatur converti tam parallelogrammum quam trilineum circa unum latus, puta BC .

MANIFESTUM est à parallelogrammo describi vel cylindrum, vel cylindraceum cylindro æqualem; à trilineo autem solidum quoddam: atque si latus ipsum BC dividatur in quotcunque partes æquales indefinite in punctis H , G , I , &c. per quæ ducantur rectæ HO , GP , IQ , &c. ipsi AB parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, manifestum est quoque solidum trilinei ad cylindrum sic se habere ut omnia quadrata rectarum BA , HO , GP , IQ , &c. ad trilineum pertinentium, ad quadratum BA toties sumptum. Ut autem in quâvis tali figurâ horum solidorum comparatio rectè institui possit, proderit sæpissimè hoc elementum ex doctrinâ indivisibilium annotasse.

Alterum latus rectum AB dividatur in quotcunque partes æquales indefinite in punctis E , D , F , &c. quæ quidem partes singulæ æquales sint singulis BH , HG , &c. ducanturque totidem rectæ EL , DM , FN , &c. lateri BC parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, quæ quidem trilineum ipsum dividunt, constituentque intra

illud alia trilinea numero indefinita atque ad communem verticem A constituta, putà AEL, ADM, AFN, ABC, &c.

Nec est quod quis dicat rectas AB, BC longitudine posse esse incommensurabiles; atque ita non posse partes unius æquales esse partibus alterius: nam præterquamquod in divisione indefinitâ hæc objectio locum non habet; illud præterea manifestum est, posse in utrâque



partes omnes esse æquales, præter extremam quandam portionem alterius illarum; quæ quidem erit definita quædam portio, quâ additâ aut detractâ, vel additis aut detractis, quæ ab illâ dependent magnitudinibus omnino definitis, nullo modo mutatur indefinitarum ratio, ex doctrinâ indivisibilium.

Dico ergo omnia hæc trilinea in trilineo ABC constituta, simul sumpta omnium quadratorum BA, HO, GP, IQ, &c. simul sumptorum dimidiam partem constituere. Intelligatur enim ipsa omnia quadrata crecta super plano trilinei; quo pacto ex doctrinâ indivisibilium illa constituent solidum quoddam quinque figuris comprehensum, quarum prima erit ipsum trilineum; secunda

secunda est trilineum cujus basis ipsi rectæ AB parallela est & opposita, & vertex punctum ipsum C; tertia autem erit quadratum super rectâ BA erectum; quarta super rectâ BC erecta, erit trilineum ipsi ABC simile & æquale; quinta tandem super lineâ AC erecta, erit utcumque plana vel curva, prout ipsa AC recta erit vel curva. Intelligatur quoque planum quoddam secans planum trilinei ABC secundum rectam BC, atque ad idem inclinatum secundum angulum semirectum versum A: hoc ergo planum sic inclinatum dividet bifariam omnia & singula quadrata erecta ut supra; unde & idem planum dividet quoque bifariam solidum ex illis quadratis constans, eruntque partes duo solida instar pyramidum, singula quatuor superficiebus contenta: horum quod præcipuè nobis utile est, basim habet trilineum ABC, tres autem reliquæ superficies illius sunt, triangulum super rectâ AB erectum & dimidium quadrati constituens; figura supra lineâ AC erecta; ac figura ea quæ ex plano inclinato secante constituitur: tale autem solidum manifesto constat ex dimidiis omnium quadratorum erectorum, ex doctrinâ indivisibilium; estque vertex illius punctum extremum lateris illius quadrati, quod quidem latus ex puncto A erigitur, ipsique perpendiculariter imminet.

Ostendamus ergo tale solidum constare etiam ex omnibus trilineis AEL, ADM, AFN; ABC, &c. vel ex aliis his iisdem æqualibus; sic enim patebit omnia hæc trilinea dimidiis omnium quadratorum erectorum esse æqualia, quandoquidem tam ab his trilineis quàm ab illis quadratorum dimidiis idem solidum constituetur, ex doctrinâ indivisibilium. Ad hoc autem altitudo talis solidi, puta recta illa quæ ex puncto A perpendiculariter ad planum ABC erecta, ad solidi verticem pertinet, estque rectæ AB æqualis, eodem modo indefinitè

dividatur quo divisa est ipsa AB, ut partes partibus multitudine & magnitudine sint æquales, atque per puncta omnia talis divisionis ducantur plana plano ABC parallela, quæ manifestò secabunt solidum propositum inter verticem & basim, & tali sectione constituent trilinea prædictis AEL, ADM, &c. singula singulis similia, æqualia & parallela; ex quibus omnibus trilineis indefinitè sumptis secundum doctrinam indivisibilium constituitur prædictum solidum quasi pyramidale, ut propositum est: reliqua patent.

PROPOSITIO TERTIA.

Itam ut ad solidum sociæ trochoidis circa axem conversæ veniamus. In figurâ trochoidis superius expositâ, intelligatur socia AMHQF 22 B circa axem CF conversâ. Dico solidum ex tali conversione ortum ad cylindrum cui inscribitur eandem rationem habere quam dimidium quadrati semicircumferentiæ rotæ dempto dimidio quadratæ diametri, ad integrum quadratum semicircumferentiæ.

NAM sicuti socia illa secat bifariam rectam GI in puncto H, sic eadem bifariam quoque secat rectam IY; esto in puncto 22: undè recta H 22: æqualis erit dimidio itineris centri GI, hoc est æqualis semicircumferentiæ rotæ. Super ipsâ H 22 ad partes verticis F, constituatur quadratum H 22 20 19, cujus diametri ducantur H 20, 22 19 secantes se invicem in centro quadrati, quod centrum sit 21 in axe CIF producto supra verticem F usque ad ipsum punctum 21. Patet autem diametrum ipsam quadrati H 20 esse rectam 9 H productam, ipsamque cadere extrâ curvam sive sociam HQF, propter easdem rationes quibus probavimus supra, rectam H 9 cadere extrâ curvam HMA.

Jam utraque rectarum AC, CF in partes æquales indefinitè dividatur, & per puncta divisionis rectæ AC ducantur rectæ ipsi CF parallelæ, putà NM, VH, 6 Q, &c. usque ad sociam AMHQF; per puncta autem divisionis rectæ CF ducantur rectæ parallelæ ipsi AC, putà 7 M, IH, 8 Q, &c. usque ad eandem sociam. Quoposito solidum sociæ de quo agitur erit ad cylindrum integrum cui inscribitur, ut omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum: atqui illa omnia quadrata dupla sunt omnium trilineorum ANM, AVH, A6Q, ACF, &c. per secundam Propositionem hujus Appendicis, quare solidum illud ad cylindrum se habet ut omnia hæc trilinea bis sumpta ad quadratum CA sumptum ut jam dictum est, puta secundum numerum rectarum CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ex divisione diametri CF in partes æquales numero indefinitas, ortarum: hoc autem quadratum semicircumferentiæ toties sumptum æquale est rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes æquales in rectâ AC: quia tam ex tali quadrato CF toties sumpto quot sunt partes in rectâ CF, quàm ex rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes in rectâ AC constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempe quod basim habet rectangulum ipsum AF, altitudinem autem rectam AC; sive quod idem est, illud quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF, ex doctrinâ indivisibilium.

Itaque solidum sociæ trochoidis sic se habebit ad suum cylindrum, ut omnia trilinea prædicta bis sumpta ad rectangulum AF toties sumptum quot sunt partes in rectâ AC, hoc est toties sumptum quot sunt omnia trilinea prædicta semel sumpta. Verum rectangulum AF duplum est rectanguli AI. Sumpto igitur hoc rectangulo AI bis toties, quoties rectangulum AF, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea

prædicta bis sumpta ad rectangulum AI toties bis sumptum; seu, sumptis tantum semel trilineis ac semel rectangulis, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea semel sumpta ad rectangulum AI toties sumptum. Est autem triangulum H 20 22 dimidium quadrati semicircumferentiæ H 22, & bilineum HQF 22 est dimidium quadrati diametri CF, quandoquidem hujus bilinei dimidia pars, nempe trilineum HQFI, sive ipsi æquale AMHG ostensum est supra æquale esse quadrato semidiametri AG vel CI; dempto autem hoc bilineo ex illo triangulo, remanet trilineum HF 22 20. Eò itaque res deducitur ut ostendamus omnia trilinea prædicta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habere ut trilineum HF 22 20 ad quadratum integrum H 20; sic enim demum patebit solidum sociæ trochoidis esse ad suum cylindrum, ut dimidium quadrati semicircumferentiæ dempto dimidio quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ.

Ad hoc autem assumatur quodlibet ex ipsis trilineis, puta A 29 11, assumens ex rectâ AC portionem A 29 forsan quadrante minorem, cui ex rectâ H 22 sumatur æqualis portio HX; ducaturque recta XQ 30 secans sociam trochoidis in puncto Q, rectam autem H 20 in puncto 30. Itaque ex naturâ trochoidis ejusque sociæ A 29 & HX exhibebunt arcus æquales: & arcus quidem A 29 sinus versus erit 29 11, arcus autem HX sinus rectus erit XQ: cumque recta X 30 æqualis sit arcui HX, erit recta Q 30 differentia inter sinum rectum XQ & suum arcum X 30. Unde ex Corollario primæ Propositionis hujus Appendicis, erunt omnes sinus versus arcus HX sive A 29 ad radium toties sumptum, quot sunt divisiones in semicircumferentiâ AC, sive H 22, ut ipsa differentia Q 30 ad semicircumferentiam H 22, sive 22:20: atqui omnes sinus versus arcus A 29 constituunt tri-

lineum A 29 11, & radius AG toties sumptus quot sunt divisiones in AC constituit rectangulum AI ex doctrinâ indivisibilem. Ut ergo trilineum A 29 11 ad rectangulum AI, ita recta Q 30 ad rectam 22 20.

De reliquis trilineis eadem erit ratio; ut si sumatur trilineum AVH assumens ex rectâ AC quadrantem circumferentiæ AV; posito etiam quadrante HI cuius sinus rectus sit IF, differentia autem inter ipsum & suum arcum sit F 21; probabitur esse trilineum AVH ad rectangulum AI, ut recta F 21 ad rectam 22 20. Pari ratione, si sumatur trilineum A 27 28 assumens ex AC rectam A 27 quadrante maiorem, positâ rectâ H 24 æquali ipsi A 27, ductâque rectâ 24 25 26 parallelâ ipsi CF ac secante sociam quidem in puncto 25, rectam autem H 20 in puncto 26, ut recta 24 25 sit sinus rectus arcûs H 24 sive ipsi æqualis 24 26, recta autem 25 26 sit differentia ejusdem sinus & sui arcûs; probabitur esse trilineum A 27 28 ad rectangulum AI, ut recta 25 26 ad rectam 22 20; atque ita de omnibus trilineis.

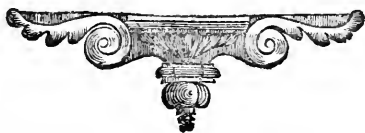
Itaque omnia trilinea simul sumpta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habent ut omnes differentię sinuum rectorum & suorum arcuum Q 30, F 21, 25 26, &c. ad semicircumferentiam 22 20 toties sumptam; omnes autem illæ differentię constituunt trilineum HF 22 20; & semicircumferentia toties sumpta constituit quadratum semicircumferentiæ, ex doctrinâ indivisibilem: unde patet Propositio.

Corollarium.

RECIDIT autem hæc ratio cum eâ quæ suprâ exposta est: siquidem trilineum HF 22 20 continet quadrantem totius quadrati H 20, ac prætereâ duplum trilinei HQF 21, hoc est duplum trilinei HMA 9: un-

dē resumptis iis quæ ex primo solido oriuntur, putâ quartâ totius parte, ac præterea cā portione quæ ad totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ, habebimus duos totius quadrantes, hoc est dimidiam partem totius, ac insuper duas portiones, quarum altera ad totum sic se habebit ut $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ; reliqua autem ad totum sic se habebit ut duplum trilinei HQF 21, sive HMA9 ad idem quadratum semicircumferentiæ, ut suprâ.

Ut ergò unicâ enunciatione explicemus rationem totius solidi trochoidis circâ axem conversæ, ad suum cylindrum; sume duos quadrantes integros quadrati H 20, puta 20 21 22, & 19 21 H; tum ex tertio quadrante H 21 22 sume duplum trilinei HQF 21, hoc est totum trilineum HQF 25 22 21 H, ac præterea $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri, hoc est $\frac{2}{3}$ trilinei HQFI sive $\frac{1}{3}$ bilinei HQF 22: tumque hæc omnia spatia simul sumpta confer cum toto quadrato H 20; atque ita satis eleganter hoc concludes. Ut se habent $\frac{2}{3}$ quadrati semicircumferentiæ, demptâ tertiâ parte quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ; ita solidum trochoidis circa axem conversæ se habet ad suum cylindrum cui inscribitur.



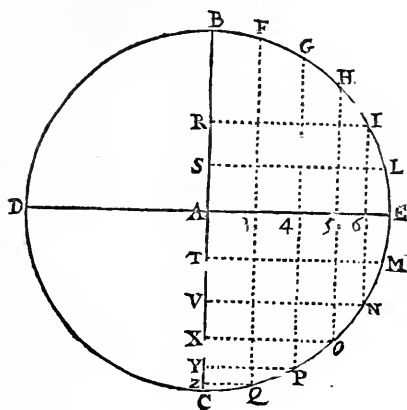
PROPOSITIO QUARTA.

Quoniam supra in demonstrando solido trochoidis circa basim conversa hoc tanquam verum sumpsimus, omnia quadrata omnium sinuum versorum semicircumferentiæ secundum æquales arcus sumptorum constituere $\frac{3}{4}$ omnium quadratorum diametri toties sumpti: atque etiam omnia quadrata omnium sinuum rectorum semicircumferentiæ secundum æquales arcus sumptorum constituere $\frac{1}{4}$ omnium quadratorum ejusdem diametri; lubet hic utrumque assumptum unicâ demonstratione ostendere.

IN figurâ primæ Propositionis hujus Appendicis, quadratum diametri BC æquale est quadratis, CZ, ZB, & duplo rectangulo CZB, five duplo quadrato ZQ. Similiter idem quadratum BC æquale quadratis CY, YB & duplo rectangulo CYB five duplo quadrato YP: atque ita de reliquis punctis divisionis diametri puta de punctis X, V, T, A, S, R, &c. at rectæ CZ, CY, CX, CV, &c. sunt omnes sinus versi: item rectæ ZB, YB, XB, VB, &c. sunt quoque omnes sinus versi qui prædictis singuli singulis, sed ordine converso sunt æquales; & horum quadrata singula singulis sunt æqualia; atque ita habemus duplum quadratorum omnium sinuum versorum. Sed & rectæ ZQ, YP, XO, VN, &c. per omnes arcus æquales semicircumferentiæ sunt omnes sinus recti; unde habemus duplum quadratorum omnium sinuum rectorum. Omnia ergo quadrata diametri æqualia sunt duplo omnium quadratorum sinuum versorum unâ cum duplo omnium quadratorum sinuum rectorum.

Ducantur jam radii AQ, AP, AO, AN, &c. Itaque quadratum radii AQ æquale est quadrato sinus recti

recti QZ unà cum quadrato AZ, five unà cum quadrato sinus complementi Q₃ : similiter quadratum radii AP æquale est quadrato sinus recti PY unà cum quadrato sinus complementi P₄, atque ita de reliquis: quo pacto habemus omnia quadrata radii æqualia esse omnibus quadratis sinuum rectorum unà cum omnibus quadratis sinuum complementorum. Verum omnes sinus recti omnibus sinibus complementorum singuli singulis



sunt æquales, si minores cum minoribus & majores cum majoribus conferantur, quia sumuntur secundum arcus æquales ex hypothesi: quare omnia quadrata radii æqualia sunt duplis quadratorum omnium sinuum rectorum. Omnia autem quadrata diametri quadrupla sunt omnium quadratorum radii; ipsa ergo omnia quadrata diametri quadrupla sunt dupli quadratorum omnium sinuum rectorum: unde omnia quadrata sinuum rectorum semel

sumpta, omnium quadratorum diametri octavam partem constituunt.

Quoniam ergo duplum omnium quadratorum sinuum rectorum constituit duas octavas partes omnium quadratorum diametri, relinquitur ut duplum quadratorum omnium sinuum versorum constituat sex octavas partes, atque ut ipsa quadrata omnium sinuum versorum semel sumpta tres octavas partes constituent ipsorum omnium diametri quadratorum, ut proponitur.

PROPOSITIO QUINTA.

Vide Fig. pag. 411. Sed & illud demonstrare lubet, quod pro solido sociæ trochoidis circa axem conversæ, priori modo demonstrando, assumptum est tanquam quid confectum ex doctrinâ indivisibilium. Omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea primæ divisionis AHFC, & FHAD pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15.

ILLUD autem statim conficitur, ex eo quod ductâ quâcunque rectâ 7 13 ex iis quæ rectæ AC parallela sunt, quæ secet trilinea primæ divisionis, ita ut ejus rectæ portio 7 M in uno trilineo, altera autem portio 13 M in altero contineatur; secet autem ipsa 7 13 lineam primæ divisionis AMHF in puncto M, & rectam secundæ divisionis V 15 in puncto 17: manifestum est, ex Geometriâ communi, ambo quadrata portionum 7 M, M 13 tantò majora esse dimidio quadrati totius 7 13, quantum est duplum quadrati portionis M 17, quæ ad trili-

neum secundæ divisionis AMHV pertinet : quod cùm de omnibus aliis rectis verum sit, patet Propositio.

DE LONGITUDINE TROCHOIDIS.

PROPOSITIO.

Cujuscunque assignatæ portioni trochoidis primariæ, æqualem rectam exhibere, atque exinde toti trochoidi.

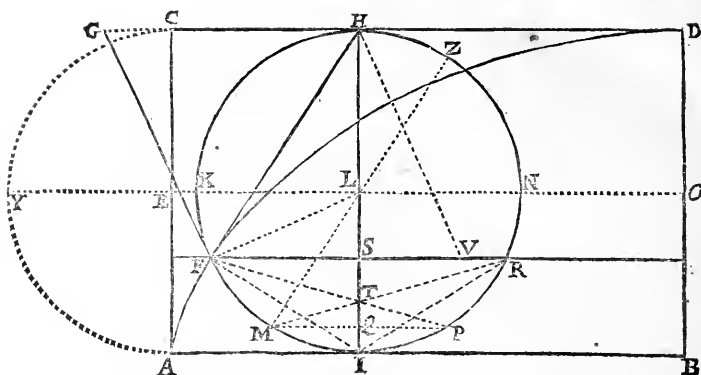
QUID sit trochoides, quid rota ex qua illa nascitur, quæ sint tres illius præcipuæ species, & quomodo inter se distinguantur, hic notum esse supponimus.

Utemur argumento ex motuum compositione desumpto, quo ex æquali moti puncti velocitate æquales describi lineas, ex inæquali inæquales, cæteris paribus necesse est, atque è converso.

Etsi verò communiter rota progrediendo uniformi motu per iter rectum in plano, simul circa centrum suum convertatur, tamen hic intelligemus rotam ipsam trahi tantum recto itinere, non autem converti; sed punctum trochoidem describens, ferri secundum circumferentiam rotæ motu uniformi, quod eodem quò suprà recidit, & Geometriæ aptius esse visum est.

F punctum contactus tam FG rectæ tangentis rotam, quàm FH tangentis trochoidem primariam, cujus dimidium est AFD, initium A, recta AIB dimidium basis, BD axis, AEC diameter rotæ initio motus, CHD linea verticis.

IXHN rota est, cujus centrum L à principio motus
Gg ij



jam percurrit rectam EL æqualem rectæ AI, existente diametro rotæ in hac positione rectâ ILH; unde ipsa recta EL vel AI arcui IF æqualis est.

GF, GH rotam tangentes æquales sunt; unde ductâ chordâ rotæ FR ipsi AI parallêlâ, & sectâ bifariam in S à diametro ILH; ductâ etiam HV ipsi FG tangenti parallêla, ac secante ipsam FR productam, si opus erit, in V; erit parallelogrammum FGHV rhombus, cujus anguli GFV, GHV bifariam secabuntur à diagonali FH tangente trochoidem.

M punctum est in quo arcus rotæ FMI bifariam secatur, & à quo ducitur chorda rotæ MQP ipsi AI parallêla, secans diametrum IH in Q; sed & ductâ chordâ MR secante eandem IH in T, erunt rectæ QI, QT æquales, propter æqualitatem triangulorum IQM, TQM.

Reliquum constructionis ei qui trochoidem noverit,

per se ex ipsa figurâ satis ostenditur : præ cæteris notetur chorda IM.

Ostendendum est portionem trochoidis AF ab initio A secundum longitudinem suam curvam mensuratam, æqualem esse quadruplo sinus versî IQ, sive duplo rectæ IT. Unde, quoniam AF est portio quæcunque dimidiæ trochoidis AFD, ostendetur ipsa curva AFD æqualis quadruplo semidiametri IL, seu duplo diametri IH. Hoc erit præcipuum hujusce Propositionis Corollarium.

Quoniam diametri rotæ ILH, AEC initio motûs congruebant, manifestum est tunc tria puncta I, A, F simul extitisse, & ambo E, L simul, & ambo C, H simul : exinde verò punctum I percurrisse rectam AI uniformi motu, sicuti & punctum L rectam EL, & punctum H rectam CH, & punctum F secundum rotæ circumferentiam percurrisse arcum IMF; quo factum est ut in trochoide primariâ quatuor illæ lineæ AI, EL, CH, & arcus IMF essent æquales : at propter implicationem recti motûs AI cum curvo IMF, punctum F tali motu composito descripsit portionem trochoidis AF, in quo ipsius F velocitas continuè mutata est augescendo sensim ab A in F. Examinemus ergò illam auctiorem continuam per omnia puncta ejusdem AF; ac pro diversis positionibus puncti F, diversas ipsius velocitates in curvâ AF cum ejusdem uniformi velocitate in arcu rotæ IMF conferamus.

Incipiamus ab eâ positione quæ primum oblata est, in qua F est quodvis punctum in dimidiâ trochoide AFD ab A diversum. Patet ex motuum legibus, velocitatem puncti F in curvâ AF ad velocitatem puncti F in arcu IMF sic se habere, ut tangens FH ad tangentem FG in parallelogrammo FGHV : idem verò de singulis punctis in curvâ AF assumptis dicitur, mutatâ convenienti positione rotæ, & ductis congruis tangentibus; augetur

autem ratio FH ad FG dum F fertur ab A in F , ergo & ipsius velocitas; & est velocitas uniformis per infinitas tangentes arcûs IMF , sicuti & ipsius puncti F in eodem arcu. Si igitur ipse idem IMF infinitè dividatur æqualiter, atque illi divisioni correspondeat infinita divisio curvæ AF (quod tamen fieri æqualiter non continget propter curvæ naturam, quod nihil interest) & singulis minoribus arcubus ipsius IMF assignentur suæ tangentes æquales, quibus etiam respondeant totidem tangentes curvæ AF , quanquam minimè æquales, erunt per vigesimam quartam Libri quinti Euclidis, quoties opus fuerit repetitam, omnes tangentes curvæ AF simul sumptæ ad omnes tangentes æquales arcûs IMF simul sumptas, ut omnes velocitates puncti F in curvâ AF , ad omnes velocitates ejusdem puncti F in arcu IMF : atqui ut velocitates inter se, ita sunt lineæ ab ipsis percursum, putà curva AF & arcus IMF . Ut ergo omnes tangentes curvæ AF ad omnes tangentes arcûs IMF , sic ipsa curva AF ad ipsum arcum IMF ; quod primò notetur.

Præterea quoniam recta FG tangit circulum IFH , & à contactu ducitur recta FSR ipsum circulum secans, erit per trigessimam secundam libri tertii Element. Euclidis, angulus GFR angulo FIR æqualis, & dimidius GFH dimidio FIS ; unde triangula isoscelia FGH , FLI similia sunt. Ut ergo tangens FH ad tangentem FG , ita chorda IF ad radius FL ; & divisio infinitè, ut supra, arcu IMF & curva AF , adjunctisque iisdem infinitis minoribus tangentibus, ducantur à puncto I totidem chordæ ad singula arcûs IMF puncta; probabimus ex Geometriâ, chordas illas omnes simul sumptas ad radius FL toties sumptum sic se habere, ut omnes tangentes curvæ AF simul ad omnes tangentes arcus IMF simul; hoc est per primum notatum, ut curva ipsa AF ad arcum ipsum IMF : quod secundò notetur.

Jam arcus IM qui ipsius IMF dimidius est, dividatur æqualiter infinite; sed ita ut in ipso IM tot sint divisiones quot in toto IMF, hoc est quot sunt chordæ in ipso arcu IMF, sive quoties sumptus est radius FL; tum à singulis arcûs IM punctis in radium IS demittantur totidem sinus recti, quorum maximus est MQ: tot ergo sunt sinus recti ab arcu IM, quot chordæ in arcu IMF, & unusquisque sinus unius cujusque chordæ correlatæ dimidium est; unde ipsorum omnium sinuum summa dupla æqualis est summæ chordarum semel sumptæ. Erat autem ex secundo notato summa chordarum ad summam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF; ergo sinuum dictorum summa dupla se habet ad summam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF. At ut summa illa dupla sinuum ad summam illam radiorum, sic se habet duplum sinus versû IQ ad arcum IM, per Lemma ad id inventum & ad alia permulta ardua perutile; & ut duplum IQ ad arcum IM, ita quadruplum IQ ad duplum arcus IM, hoc est ad arcum IMF. Ut ergo hoc quadruplum sinûs versû IQ ad arcum IMF, ita curva AF ad eundem arcum IMF; quare hæc curva AF æqualis est quadruplo sinûs versû IQ: quod erat propositum.

Corollarium.

COROLLARIUM manifestum est. Si enim pro trochoidis portione AF, ut suprâ, assumamus ipsam dimidiam trochoidem integram AFD, tunc rotæ diametæ quæ erat IH, cum axe BOD congruet; & punctum I puncto B, & punctum H puncto D, & punctum L, puncto O, & punctum F punctis H, D, & punctum M puncto X, & punctum Q punctis seu centris L, O, & punctum T punctis seu verticibus H, D, &c. Unde arcus IMF fiet semicircumferentia rotæ IXH, & arcus

IM fiet quadrans IX, & sinus versus IQ fiet radius IL, &c.

Itaque per Propositionem, semi-trochoides AFD sinus versū IL erit quadrupla, seu diametri IH dupla, quod est Corollarium.

Hæc & multa alia, cū circa annos 1635 & 1640 vigente animi robore detexissem, & ferè omnia publicè multotiès patefecissem, tam in Cathedra Regia, quàm in multorum doctorum conventibus; immò & quibuscumque amicis literatis privatim, unicam hanc de longitudine trochoidis Propositionem semper reticui, sperabam enim eadem methodo (quam primus, ut puto, detexi) me multò majora detecturum, atque imprimis multas quadraturas. Nec me spes ex toto fefellit; innumeras enim adhuc teneo, non eas tamen quas præcipuè intendebar, de quibus viderint posterius quibus hæc nostra speculatio non erit forsitan inutilis. Hoc tamen eos monebo, doctrinam de motuum compositione adèò universalem esse, ut nec analysi solâ coerceatur; nec adjunctâ infinitorum doctrinâ, cum rationalibus & irrationalibus, atque logarithmicis quantitatibus; quippe hæc omnia motus comprehendit, non ab ipsis comprehenditur: hinc latissimus patet exercitationibus Mathematicis campus, idemque plusquàm solidus.

Negligentiâ tamen meâ, quòd nihil prælo committerem, factum est ut quidam Extranei nationis nostræ æmuli, vel potius eidem invidi, ex eorum numero qui ut fuci, apud favos invadunt, & quod elaborare non possunt mel, vi & injuriâ sibi vendicant, multa mea mihi eripere conarentur, eaque sibi tribuere. Sed & ad id adjuverunt ex Nostratibus quidam, mihi præ cæteris invidi; qui cū mihi nihil reliquum esse cuperent nec inyenta mea sibi arrogare auderent, ne ridiculi apud Gallos

Gallos haberentur, ea cuilibet extraneo, (quamquam multis annis posteriori) quàm mihi suo civi & vero inventori, mallent addicere; & sic contra perfectam sibi veritatem, & verbis & scriptis impudenter mentiri.

His artibus, ipsa trochoides, ejusque tangentes, & plana, sed & solida fermè omnia mihi crepta sunt; ac ne ad extrema fures penetrarent, solus obex obstitit, solidum circa axem, quod de industriâ cum Propositione præmissâ de longitudine reticueram. Sustinui, & expectavi donec circa ipsum solidum fœdè errarent qui præ cæteris sapere videri volebant, quorum ipsorum, super hac re, literas autographas etiamnum asservo, easque non unicas: tunc verò solidum ipsum vulgavi anno 1645, nostrisque atque illis extraneis patefeci, quorum (extraneorum inquam) responsum accepi mæroris atque indignationis plenum, ob errorem contra spem suam patefactum. Latabar interim, & hæc illis subinde (arrogantiùs forsan) exprobrabam, Certè meæ quisquiliæ alicujus sunt pretii, in quas fures adcò cupidè involent, easque sibi retinere tantâ pertinaciâ contendant.

Possùm tamen cùm libuerit, mea à furibus recuperare. Habeo enim ad id instrumenta valida, scripta manu, annis & diebus suis munita à viris celeberrimis; nec deerunt testimonia prælis commissâ à quibusdam, prudentiùs quàm ego de futuro furto præfagientibus, idque multis annis ante furtum ipsum: his, dum adhuc vivo, utar, ex amicorum meorum judicio.

Redeo ad præmissam Propositionem de longitudine trochoidis, de qua nihil, nec publicè, nec privatim me communicasse jam testatus sum; eam tamen multis annis postea invenit Anglus quidam vir doctissimus, & prælo per se vel per amicos, suo nomine vulgavit. Methodus illius à nostrâ planè diversa est, sed conclusio vera & elegans. Ait enim portionem quamcunque semitro-

quare HF cum dupla IQ constituunt diametrum; & sic dupla HF cum quadrupla IQ, diametri duplum constituunt. Sed & ex Corollario, semitrochoides AFD ejusdem diametri dupla est; itaque ipsa AFD duplo tangentis HF, & quadruplo sinûs versû IQ æqualis est: demptis ergo utrinque æqualibus, hinc quidem quadruplo sinûs versû, illinc autem portione AF semitrochoidis, superest ut reliqua portio semitrochoidis FD duplo tangentis HF sit æqualis.

Potuit demonstratio directè institui per motuum compositionem, initio sumpto à vertice D, in curva DF portione quâcunque semitrochoidis; quo pacto, conclusio per se incidisset in duplum tangentis HF, ut mox dictum est. Ad hoc, ductâ diametro MLZ ipsi HF parallela, demittendi essent ab omnibus punctis arcûs rotæ HF infinities æqualiter divisi, totidem sinus recti in ipsam diametrum MLZ; & totidem tangentes ad ipsûm arcum rotæ HF pertinentes; atque totidem ipsis correspondentes, pertinentesque ad curvam DF; omninò sicuti de arcu IMF, ac de curva AF superius dictum est, &c. adhibito tandem Lemmate, & congruis argumentis. Sed prior demonstratio prior etiam in mentem incurrit, in quâ ideò mens ipsa conquievit, quod & Propositionis, & ipsius trochoidis idem esset initium punctum A.

De longitudine trochoidum aliarum ac sociarum omnium, aliàs dicemus.



EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD R. P. MERSENNUM.

REVERENDE PATER,

Ex propositionibus Clarissimi Torricellii eas tantum examinandas censui, quas nonnisi ab egregio Geometrà profectas esse judicabam. Quapropter prætergressis octo primis circa sphaeram, & solida eidem inscripta & circumscripta, quarum examen, quemvis vel mediocriter versatum fugere non posse existimavi, nonam aggressus sum quæ est de dimensione cochleæ, quam, ut ardua est, ita veram esse certissimâ demonstratione perspexi; ita ut ex ea unica Authorem inter præstantes hujus sæculi Mathematicos annumerare non verear. Quodque fortassis mirere nihil refert; magisne an minus inter se distent spiræ ipsius cochleæ, modo idem sit semper triangulum à quo describatur; sed & etiamsi ipsum triangulum moveatur tantum ad motum parallelogrammi, non autem motu progressivo, ita ut idem triangulum absolutâ conversione in se ipsum redeat: eodem modo res habebit, nec mutabitur Propositio.

De centro gravitatis parabolæ inveniendi à priori, nullâ suppositâ ejus quadraturâ; si ipse sic proponit, ut se invenisse intelligat, laudamus: si verò à nobis quærit, dabitur illi non solum in parabola conica, quam quadraticam appellamus, quia in ea quadrata ordina-

tīm applicatarum inter se sunt, ut portiones diametri; sed etiam in parabola cubica, in quadrato quadratica, &c. atque in earum solidis; siue ipsæ parabolæ circa suos axes, siue circa tangentes ad extremitatem axis, siue circa aliquam ex ordinatis ad axem convertantur, & geniti inde solidi, siue fusi parabolici, dimidium plano ad ipsius axem erecto resectum proponatur: & multa alia de quibus, si aliquando res postulabit, fusiùs agemus. Nunc verò hoc indicasse sufficiat, in dimidio fuso parabolico quadratico centrum gravitatis axem dividere in duas portiones, quarum ea quæ ad verticem ad eam quæ ad basim se habet ut 11 ad 5; in cubico, ut 13 ad 7; in quadrato-quadratico, ut 15 ad 9; in quadrato-cubico, ut 17 ad 11; atque ita in infinitum, addendo semper 2 ad singulos præcedentis rationis terminos. Prætereo rationes solidorum ipsorum ad cylindros quibus inscribuntur, quas omnes invenimus, & quarum speculatio forsan minimè spernenda viro clarissimo videbitur.

In cycloide Torricellii agnosco nostram trochoidem, nec rectè percipio quomodo ipsa ad Italos pervenerit, nobis nescientibus. Quod si illa tanto viro placuerit, lætor. Spero autem brevi fore ut eadem in lucem emitatur, cum suis tangentibus, cumque solido ex conversione illius circa basim genito, forsan & circa axem: neque id tantùm in prima trochoide cujus basis æqualis esse ponitur circumferentiæ rotæ genitricis; sed etiam in quavis alia trochoide siue prolata, siue contracta; atque in fociis earundem.

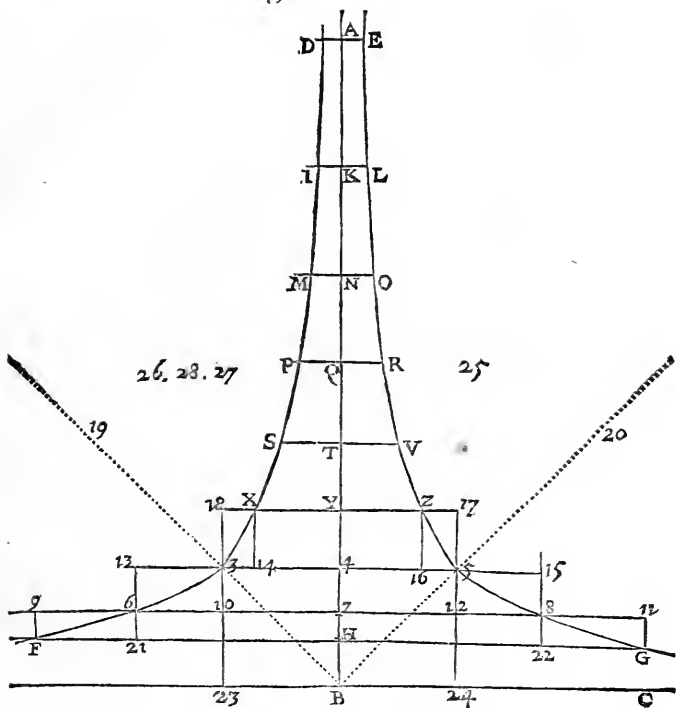
Propositio de solido à qualibet sectione conii circa axem circumvolutâ descripto, atque ad conum eisdem inscriptum unicâ enunciatione collato, elegantissima est & verissima, sicut demonstravimus: nec ei inferior est ea quæ sub eadem figura habetur de centro

gravitatis ipsorum solidorum, quam etiam demonstravimus. Quod si ambas duabus tantum demonstrationibus ostenderit, nihil video quod in hac materia desiderari possit; sed vereor ne positis Authorum demonstrationibus, ipse inde propositiones suas deduxerit: quod etiam si ita esset, tamen non parum laudis mereretur; neque enim cuilibet contingit, aliorum inventis addere tanti ponderis propositiones.

Ejusdem fere argumenti est sequens Propositio de frusto sphaerico duobus planis parallelis secto, de quo nihil dicimus, quia in eo non immorati sumus.

Vide Torricell. de solido Hyperb. pag. 413.

Omnium elegantissima est decima quarta, cujus demonstrationem hic addere libet, cuperemque valde scire utrum in idem cum clarissimo viro medium inciderim, vel diversum. Igitur in figura constructionem ex ipsius Torricellii Propositione notam esse suppono, existente B centro hyperbolæ, asymptotis BA, BC ad angulos rectos, solido autem quovis DEFG terminato, ut propositum est; primum ostendamus tale solidum medium proportionale esse inter duos cylindros ejusdem altitudinis cum solido, puta rectæ AH, quorum unius basis sit circulus DE, alterius vero FG; ex hac enim cætera demonstrabuntur. Inter BA, & BH, media proportionalis sit BT; tum inter BA & BT, media quoque proportionalis sit BN; atque inter BT & BH, esto B₄. Item inter BA & BN, sit BK; inter BN & BT, sit BQ; inter BT & B₄, sit BY; inter B₄ & BH, sit B₇ atque ita tot continuè inveniantur mediæ quot libuerit, sic enim erunt quoque continuè proportionales differentiæ ipsarum H 7, 74, 4Y, &c. usque ad ultimam KA, & in eadem ratione primarum. Patet autem hac ratione eò deveniri posse, ut cylindrus cujus basis circulus FG, altitudo autem ultima differentia KA, minor sit quovis spatio solido dato. Jam per puncta 7, 4, Y, T, ducan-



tur plana ad rectam AB erecta, solidum secantia secundum circulos quorum diametri 68, 35, XZ, SV, &c. parallelæ ipsi FG; patet quoque ex natura hyperbolæ, proportionales esse rectas FH, 67, 34, XY, ST, &c. reliquas in eadem ratione, sed inversa, primarum BH, B7, B4, &c. Denique inscribantur & circumscribatur ipsi solido totidem cylindri quot sunt differentia, H 7, 74,

4 Y, &c. sintque inscripti 8 21, 5 10, Z 14, &c. circumscripti vero F 11, 6 15, 3 17, &c. constat ergo omnes circumscriptos simul superare omnes inscriptos simul, minori spatio quàm cylindro altitudinis K-A, & basis FG; hoc est minori spatio quovis proposito. Præterea cylindrus basis SV, & altitudinis AH, est medius proportionalis inter cylindros ejusdem altitudinis, sed basium DE, FG. Dividatur ipse medius in cylindros ejusdem basis SV; sed altitudinum H 7, 74, 4 Y, YT, &c. usque ad ultimum altitudinis AK, qui ultimus major quidem est primo inscripto 8 21, sed minor circumscripto F, 11, quod sic ostendimus. Quoniam recta ST media proportionalis est inter DA & FH, major erit ratio circuli medii SV ad circulum 6 8, quàm rectæ DA ad rectam 6 7: at idem circulus medius SV, ad circulum FG minorem habebit rationem quàm eadem recta DA ad eandem 6 7; ut autem DA ad 6 7, ita H 7 ad AK: ergo circulus medius SV, ad basim quidem inscripti 6 8, majorem habet rationem; ad basim vero circumscripti FG, minorem quàm altitudo communis inscripti, & circumscripti H 7 ad altitudinem ultimi medii AK. Eodem modo demonstrabimus cylindrum altitudinis NK, basis verò circuli medii SV majorem quidem esse secundo inscripto 5 10, minorem vero secundo circumscripto 6 15; atque ita de reliquis ordine sumptis. Patet igitur tandem, totum cylindrum medium omnibus quidem inscriptis simul sumptis majorem esse; omnibus verò circumscriptis minorem. Cætera persequi apud vos inutile fuerit,

Corollarium.

Corollarium.

PA T E T autem manifestò positis rectis BH , B_7 , B_4 , BY ; &c. continuè proportionalibus, & factà constructione eàdem, dividi totum solidum hyperbolicum FG , ED in portiones continuè proportionales in eadem quidem, sed inversa ratione rectarum ipsarum BH , B_7 , B_4 , &c. quæ portiones erunt FG 86, 6853, 35 ZX , &c. quia qui ipsis portionibus æquales erunt cylindri, proportionales erunt in ratione propòsita, quæ proprietas eximia est.

Secundò intelligamus solidum hyperbolicum BA versus A infinitè productum esse, atque idem secari quovis plano 35 ad rectam BA erectò in puncto 4, ac circulum constituyente cujus diameter 35; tum super hac base, circulo 35, esto cylindrus 35 24 23, cujus altitudo sit B_4 : dico talem cylindrum æqualem esse solido hyperbolico super basi 35 constituto, atque infinitè versus A extenso.

Aliàs, vel cylindrus major est solido, vel minor. Esto primùm major, si fieri potest, & excessus esto magnitudo 25, ita ut solidum hyperbolicum unà cum spatio 25 intelligatur æquale esse cylindro propòsito 35 24 23. Jam intelligatur cylindrus quidam cujus altitudo B_4 , semidiameter verò basis PQ , ita ut hic cylindrus minor sit spatio 25: sit autem PQ perpendicularis ad BA , atque interjecta inter hyperbolam, & asymptoton, hoc enim fieri potest. Tum fiat ut B_4 ad BQ , ita BQ ad BA , & terminetur solidum hyperbolicum circulo DAE . Erit ergo ex prædemonstratis solidum 35 ED æquale cylindro altitudinis A_4 , basis verò semidiametri PQ . Addantur inæqualia; solido quidem, spatium 25; cylindro verò, alter cylindrus altitudinis B_4 , & ejusdem

basis semidiametri PQ. Fient ergo inæqualia : illinc solidum hyperbolicum 3 5 ED, unà cum spatio 25, majus; hinc verò, totus cylindrus altitudinis AB basis semidiametri PQ, minor. At totus hinc cylindrus æqualis est cylindro proposito 3 5 24 23, quia bases & altitudines reciprocantur ex natura hyperbolæ: ergo solidum hyperbolicum 3 5 ED, unà cum spatio 25, majus esset cylindro 3 5 24 23. Verum solidum hyperbolicum infinite extensum versus A, unà cum eodem spatio 25, positum est æquale eidem cylindro 3 5 24 23: hoc ergo infinite extensum minus esset sua portione 3 5 ED, quod est absurdum. Estò secundo cylindrus 5 23 minor solido hyperbolico infinite extenso, si fieri potest; poterit ergo ex ipso solido detrahi portio quædam, puta 3 5 ED major eodem cylindro 5 23; ita ut planum DE, parallelum sit plano 3 5, constituatque circulum cujus centrum A. Inveniatur recta BQ media proportionalis inter BA & B4; feceturque solidum hyperbolicum plano PQR parallelo ipsi 3 5. Jam ut suprà, solidum 3 5 ED æquale est cylindro basis PQR, altitudinis verò A 4: cylindrus verò 5 23 æqualis est cylindro ejusdem basis PQR, altitudinis verò AB: ponitur autem solidum 3 5 ED majus cylindro 5 23; ergo cylindrus basis PQR altitudinis A 4 major esset cylindro ejusdem basis & altitudinis AB, quod est absurdum.

Tandem proposito quovis solido hyperbolico ex prædictis, putà DEGF: oporteat ipsum dividere in duas portiones quæ datam servant rationem, ut magnitudo data 26 ad datam magnitudinem 27: fiat ut recta FH ad rectam DA, ita magnitudo 26 ad aliam quampiam 28; dividaturque recta AH altitudo solidi in puncto T, ita ut portiones HT, TA eandem habeant rationem quàm magnitudo 28, ad magnitudinem 27: & per punctum T ducatur planum STV parallelum plano FG vel

DE, quod quidem planum STV dividat solidum hyperbolicum in duas portiones FGVS, & SVED : dico has portiones eandem inter se rationem habere, quàm magnitudo 26 ad magnitudinem 27. Nam inter BT & BH media sit proportionalis B4 : item inter BT & BA media sit proportionalis BN ; & per puncta 4, N ducantur plana prædictis parallela, atque solidum secantia secundum circulos quorum diametri 3 4 5, MNO. Quoniam ergo continuè sunt proportionales BH, B4, BT, erunt quoque proportionales in eadem sed inversa ratione rectæ FH, 3 4, ST propter hyperbolam : quare ex prædemonstratis, cylindrus altitudinis HT, basis verò diametri 3 5 æqualis est portioni solidi hyperbolici FGVS. Simili argumento cylindrus altitudinis TA, basis autem diametri MO, æqualis est reliquæ portioni SVED : sunt autem ipsi cylindri in ratione data magnitudinis 26 ad 27, ut jam demonstrabimus ; quare & portiones solidi hyperbolici sunt in eadem ratione datâ.

Et quidem, quod cylindri sint in ratione data magnitudinis 26 ad magnitudinem 27, sic constabit. Quoniam ex constructione, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita recta FH ad rectam DA : ut autem FH ad DA, ita sumpta communi altitudine recta ST, rectangulum sub FH, ST ad rectangulum sub DA, ST, hoc est, ita quadratum 3 4 ad quadratum MN ; sive circulus diametri 3 5 ad circulum diametri MO. Ergo, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita circulus diametri 3 5, ad circulum diametri MO. Addatur hinc quidem ratio altitudinis HT ad altitudinem TA ; illinc autem ratio magnitudinis 28 ad magnitudinem 27, quæ rationes sunt eadem ; ex constructione igitur, ratio composita ex rationibus circuli 3 5 ad circulum MO, & altitudinis HT ad altitudinem TA, hoc est ratio cylindrorum, componitur ex rationibus magnitudinis 26 ad magnitudinem 28,

& 28 ad 27; quæ ambæ rationes constituunt rationem 26 ad 27, ut propositum est.

Hic mirabilis quædam proprietas accidit circa plana spatia hyperbolica hujus constructionis, illa nempe FG 86, 68 s 3, 35 ZX, XZVS, &c. quæ omnia sunt æqualia, positis continuè proportionalibus rectis BH, B7, B4, BY, &c. ut supra cujus quidem proprietatis demonstratio non erit difficilis eiqui animadverterit omnia parallelogramma iisdem spatiis inscripta, esse æqualia; sicuti & circumscripta æqualia.

Tandem si asymptoti hyperbolæ non sint ad angulum rectum, vel eadem erunt ex se demonstrationes omnes præcedentes; vel additione, aut detractiōe conorum quorundam, fient eadem.

Caterum, REVERENDE PATER, hoc scias velim, me magnificere adeo Excellentem Virum, etiam ultra quàm verbis aut litteris exprimere possim. Fac etiam, obsecro, ut ipse innotescat nostris Geometris, præsertim D. D. *De Fermat*, & *Descartes*, quorum utrumque, meo quidem judicio, nec ipsi Archimedi jure quis postposuerit; hoc enim apud me recipio, fore ut & his & illi gratissimum quid facturus sis.

CLARISSIMO VIRO ROBERVALLIO

EVANGELISTA TORRICELLIUS S. P.

LOQUAR apertè tecum sine alio interprete, VIRO CLARISSIME, quis enim dissimulare possit? Et quanquam litteræ tuæ ad Clarissimum Mersennum missæ sint, cohibere tamen non possum animi mei impetum, quin ad te currat, tibi que totum se dedicit tanquam

Apollini Geometrarum. Fortunatas certè jam existimare debeo nugas meas, atque illas non jam ampliùs nihilifacere, quandoquidem dignæ habitæ sunt, quæ iudicium tuum subirent, & animadversionibus tuis nobilitarentur. Principio, ex me quaris an centrorum gravitatis parabolæ à priori, ut inventum à me proponatur, aut quæratur ut ignotum: erubescerem certè ignotum theorema inter alias propositiunculas meas à me demonstratas collocare. Ostendimus illud unicâ, brevique demonstratione; sed eâ occasione admiratus sum fecunditatem ingenii tui circa tot parabolas atque earum solida, non solùm Geometricè, sed etiam Mechanicè considerata, & ad mensuram scientiamque redacta. De his nihil ego habeo quod proferam, & fortasse non habeo; siquidem difficillimæ, nisi fallor, contemplationis censeo hujusmodi theoremata. Præterea immorari non soleo circa figuras non vulgatas, & circa solida quæ si nova sint, saltè ab antiquis & receptis figuris planis ortum non habeant; atque hoc eâ præcipuè ratione, ut laborum fructus, quando res ex animi voto succedet, communem litteratorum applausum sortiatur, neque sit qui invidet figuras à me ipso fabricatas. Mensura cycloidis, (hoc enim nomine Clarissimus Galilæus appellavit 45 jam ab hinc annis figuram quæ fortasse tibi nunc trochois est) mihi sese ultrò obtulit non speranti, penè dixi non quarenti. Illam deinde quinquies diversis semper principiis demonstravi: Quoad solida nihil habeo: tangentem prædictæ lineæ jam ostenderat mihi Vincentius Vivianus Florentinus Clarissimi Galilæi alumnus, etiam nunc adolescens. Quoad auctorem hujus figuræ, credo ego ingenium tuum acurissimum & feracissimum, illam ex se observare potuisse nemine indicante; hujusmodi enim lineæ natura familiaris erat, constatque ex compositione duorum

motuum, recti & circularis. Attamen vivunt adhuc testes quibus olim Galilæus irritas lucubrationes suas communicavit circa hanc figuram; imò supersunt paginae aliquot clarissimi Mathematici, in quibus & picturas & aggressiones suas nonnullas circa hoc subiectum jam adolescens delineaverat. Pluribus abhinc annis theorema hoc proposuit ille mirabili Geometræ Cavalerio nostro, ipsique dixit idem quod & mihi, & pluribus aliis confirmavit, nempe se olim experimentum fecisse, appensis ad libellam spatii figurarum materialibus, quantuplum esset cycloidale spatium ad circumulum suum genitorem, & semper illud invenisse, nescio quo fato minus quàm triplum; ideo inceptam contemplationem deseruisse, ob incommensurabilitatis suspicionem. Quod si aliquando, inconstanti fallaciâ, reperisset minus quàm triplum, aliquando verò majus, tunc assererat Linæus Mathematicus ulteriorem contemplationem profecuturum fuisse; rejectâ scilicet variationis causâ in materiæ inæqualitatem atque rasurâ.

Propositionem illam de solido à qualibet conii sectione circa axem revoluta descripto, atque de ejusdem solidi centro gravitatis, unicâ simul brevique demonstratione ostendimus, suppositâ tantum modicâ Apollonii cognitione. Verùm duplex hoc theorema inter neglecta à me rejicitur; nullum enim habebit locum in opusculis, quæ nunc propalare cogor, in quibus præcipuè profiteor materiæ unitatem.

Quoad solidum hyperbolicum, jam non meum sed tuum, dispeream si jam ampliùs spero me visurum tam sublimem & tam doctam demonstrationem quæ cum tua conferri mereatur. Optimum equidem maximumque nunc percipio laborum meorum fructum, eo tantum nomine, quod tu, Vir Clarissime atque Ingeniosissime, tam acutis demonstrationibus, tantâque doctrinâ affluens

tiâ , unicam ineptiolam meam illustrare dignatus sis. Gratias primùm ago maximas. Deinde ut desiderio tuo satisfaciam , methodus mea circa demonstrationem huius solidi diversissima est à tuâ. Altera quidem ex meis aggressionibus per doctrinam indivisibilium procedit , quæ si cum erudito lectore semper ageretur , paucissimis verbis expediri posset : altera verò per inscriptionem & circumscriptionem , more Veterum , non adeo expedita est , sed facilis , & fortasse curiosa. Hoc unum reperi in tua scriptura , quod conveniat cum meis , nempe constructio illa pro secundo frusto solidi hyperbolici in data ratione ; demonstrationes verò ab eadem constructione dissimillimæ emanant.

Cæterùm evidentiores agnosco hyperbolas in laudibus quibus me exornas , quàm in demonstrationibus quibus hyperbolicum solidum ipse metiris. Utinam illis aliquando dignus fiam , ut in lectione operum tuorum , quæ avidissimus expecto , illa intelligere valeam , fructusque scientiæ suavissimos , & divitias ingenii inæstimabiles inde colligere possim , & intellectum meum ditare. Vale VIR CLARISSIME , tuorumque Operum , editionem accelera , in publica litteratorum omnium utilitatem.

EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD EVANGELISTAM TORRICELLIUM.

VIR CLARISSIME,

Si me unum respicerem ; si nullâ existimationis nostræ , si nullâ cæterorum hominum , si nullâ ipsius , quam præ cæteris diligo , veritatis habitâ ratione , internâ animi tranquillitate conquiescerem : non me moveret profectò , quòd vos Deûm atque hominum fidem invocetis , quòd celeberrimorum hominum testimonium in me adducere conemini , quòd denique nullum non moveatis lapidem , ad hoc ut ego meorum ipsius operum plagiarius habear : quippe qui planè mihi conscius sum , ex iis quæ ad vos scripsi , nihil non verum esse ; sed fateor ingenuè ; longè absum à præstanti illo vitæ philosophicæ statu , tantamque beatitudinem si optare nobis licet , non etiam sperare statim licet. Ego enim inter multos natus , inter multos educatus , cum multis vivere atque conversari assuetus , cum multis etiam necessitudines contraxi ; ita ut rebus externis non moveri huc usque nondùm didicerim. Itaque admonet nos existimatio nostra , quam tueri , quamque , si quo id labore liceat aut impendio , promovere tenemur ; postulant amici , collegæ , Mathematici Galliarum præstantissimi , quibus omnia me debere fateor ; cogit ipsa cui totum me dicavi veritas : ne tam gravem vestram accusatio-

nem

nem prorsus negligam, præsertim quam nullius negotiū fuerit refellere; cum præter rationes nostras, quæ per se sufficiunt, iisdem ambo testibus utamur. Erit etiam quod de vobis expostulem, & ut spero non injuriâ, qui cum festucam in nostris oculis queratis, trabem in vestris non animadvertatis. Nolim tamen ob id tolli inter nos litterarum commercium; quod vos nimium rigidè, meo quidem judicio, quasi aliquid nobis timendum minati estis: quin potius optarim tales iras, suavissimi commercii redintegrationem esse. Quod si inter nos, per nos ipsos conveniri non potest, judicent amici: nos judicio ipsorum stare promittamus. Ad rem venio.

De propositione Rotæ atque Trochoidum illius, primum audiui Parisiis anno 1628. (eo enim demum anno ab expeditione Rupellana reversus, statui in maxima illa atque omni studiorum genere excultissima urbe, firmas sedes stabilire; cum antea vagus, incertis sedibus, diversis in regni Gallici partibus degissem) asseruitque qui proponebat celeberrimus vir Pater Merfennus, talem questionem per multos jam annos à pluribus tentatam, eousque insolutam permanisse: cui ego respondi, hoc ei commune esse cum multis aliis vetustissimis nobilissimisque Propositionibus; neque ideo quicquam in illa magis quam in his mirandum videri, si unâ cum illis solutione careret. Ac tunc ipse, cum difficillimam existimarem, certè supra vires meas, intactam ita dimisi, ut per sex annos de illa ne quidem somniarim. Atque ut verum fatear, ego tunc annuum agens vigesimum septimum, etiamsi continuo decennii antea exercitio, discendo, docendoque, atque agendo in rebus Mathematicis, in primis verò in Analyticis, quibus etiamnum maximè delector, non mediocriter profecissem; tamen neque cum adhuc habitum mihi comparaveram, neque eas ingenii vires susceperam,

quæ ad ejusmodi quæstiones sufficerent. Interea, cùm mecum ipse sapiùs cogitarem, quâ potissimùm ratione possem in suavissimæ Matheseos adita penetrare, statui divinum Archimedes, quem ferè unum inter antiquos Geometras suspicio, attentius considerare; ex qua consideratione sublimem illam & numquam satis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi: sic enim tunc vocabam eam quæ à Clarissimo Cavallerio vocatur doctrina indivisibilium. Ridebis forsan; &, Hic ergo Galus, inquires, non solum trochoidum dimensionem ante nos, si Diis placet; non solum parabolarum omnium; non solum solidorum ad has & illas pertinentium, non solum planorum ab helicibus cujuscunque gradus aut dignitatis compræhensorum, non solum earundem helicum secundum longitudinem cum prædictis parabolis comparationem, non solum curvarum omnium tangentes per motuum compositionem, non solum doctrinam centrorum gravitatis invenerit, sed & præstantissimi nostri Cavallerii indivisibilia quoque? atque illa omnia nobis; hæc illi, plagiarium ille impunè eripuerit? Verumtamen, rideatis licet, & talia, aut iis pejora de nobis putetis, aut vociferemini, Ego trochoides, parabolas, helices, tangentes, & centra ante vos; imò & multò plura non solum inveni, sed & vulgavi: an vultis ut verum reticeam quod partes nostras adjuvat, falsum autem proferam quod nobis nociturum sit? nos ætate aut tempore saltem priores, ætatis aut temporis beneficia respuemus, & junioribus aut saltem tempore posterioribus, vivi adhuc relinquemus? Apage stultam illam in nosmetipsos injustitiam. Quòd si cuncta ego unicâ epistolâ quam ad vos scripsi, non enumeravi, nihil mirum; illa enim aliunde satis proluxa extitit, nec id necessarium, aut operæ pretium judicavi. Deinde etiam, quid de paucis aliquot propositionibus enumeratis gloriari attinet?

Panperis est numerare pecus.

Sed de vobis plura postea : nunc de Indivisibilibus , quoniam illa ad rem faciunt , dicamus . Illa ergo , an ante nos Clarissimus Cavallerius invenerit , nescio : certè illud scio , me integro quinquennio antequam in lucem emiserit , eâ doctrinâ usum fuisse in solvendis multis , iisque planè arduis propositionibus . Attamen , abstinere moveri ; ego tanto viro , tantæ ac tam sublimis doctrinæ inventionem non eripiam ; nec possum ; nec si possum , faciam . Ille prior vulgavit : ille , hoc jure , suam fecit : ille , hoc jure , habeat atque possideat : ille tandem , hoc jure , inventoris nomine gaudeat . Absit ut in posterum , quod nec priùs feci , in tali causa , intercessoris ridiculi provinciam mihi suscipiam ; præsertim cum nequidem inter amicos quicquam unquam de tali doctrina vulgaverim , quam neque publici juris facere , nisi post aliquot annos , juvenili quodam mei ipsius amore , decreveram . Quippe sperabam interim , fore ut solutione quæstionum quas quotidie nullo negotio tali instrumento adjutus vulgabam , doctrinæ famam facilè consequeretur : neque sanè hæc spes ex toto me fefellit . Postquam enim ingenti ardore doctrinam ipsam excoluissem , eandemque ad puncta , ad lineas , ad superficies , ad angulos , ad solida præcipuè ; postremò etiam ad numeros extendissem , hæud fuit difficile ea exequi propter quæ amici latarentur , invidi disrumperentur . Exultabam ergo nimium juveniliter , ac tanto diligentius doctrinam ipsam reticebam ; dignus planè in quem Poëta dixerit ,

Nec ferre videt sua gaudia ventos ;

qui detectâ auri fodinâ ditissimâ , dum grana quædam ex ea decerpta ostento , ut ex divitibus ac beatis qui-

dam habear; interim alius eandem à se quoque detestam, palàm, plaudentibus omnibus, ostendit, ac publici juris facit; ita ut exinde periculum sit ne ridear, si à me quoque inventam fuisse affirmavero. Est tamen inter Clarissimi Cavallerii methodum & nostram, exigua quædam differentia. Ille enim cujusvis superficiei indivisibilia secundum infinitas lineas; solidi autem indivisibilia secundum infinitas superficies considerat. Unde ex vulgaribus Geometris plerique; sed & quidam ex superbis illis sciolis qui soli docti haberi volunt, quique si nihil aliud, certè hoc unum satis habent, ut in magnorum Virorum opera insurgant, quòd à se minimè profecta esse invidcant, occasionem carpendi Cavallerii arripuerunt, tanquam si ille aut superficies ex lineis, aut solida ex superficieribus reverà constare vellet. Quamquam autem illi coram eruditis nihil aliud lucrentur quàm ignorantia aut invidia titulum, tamen iidem coram imperitis, suâ autoritate, de doctorum famâ non mediocriter detrahunt; nec ab iis illæsus evasit Cavallerius. Nostra autem methodus, si non omnia, certè hoc cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infinita nostra seu indivisibilia sic consideramus. Lineam quidem tanquam si ex infinitis seu indefinitis numero lineis constet, superficiem ex infinitis seu indefinitis numero superficieribus, solidum ex solidis, angulum ex angulis, numerum ex unitatibus indefinitis: immo plano-planum ex plano-planis numero indefinitis componi concipimus, atque ita de altioribus; singula enim suas habent utilitates. Dum autem speciem aliquam in sua infinita resolvimus, æqualitatem quandam, vel certè notam aliquam progressionem inter partium altitudines aut latitudines ferè semper observamus. Sed de hoc satis superque: nunc ad vos redeo. Cùm itaque ope indivisibilium multa protulissem, tandem anno 1634.

celeberrimus P. Mercennus trochoidem in memoriam revocavit, non sine gravi expostulatione quasi propositionem haud quaquam ignobilem, de industria præterire difficultate illius perterritus. Ego sic castigatus cœpi sedulo ipsam inspicere; ac tunc quidem, quæ absque indivisibilibus difficillima visa erat, ipsis opitulantibus, nullo negotio patuit. Modus autem noster ab aliis omnibus quos huc usque videre contigit, longè diversus est; & nisi me nimium amo, idem illis omnibus longè antecellit; quia omnium simplicissimus, brevissimus, universalissimus, & ad solida detegenda aptissimus existat, ut sponte à natura productus, cæteri per vim ab arte effecti videantur. Habes annum quo trochoidem invenimus; diem etiam si ita expediret adjicerem. Cætera jam ad te scripsi, & horum omnium testem locupletissimum (præterquam plurimos alios, quorum epistolas de hac re etiamnum apud me asservo) ipsum eundem habeo quem laudas, celeberrimum P. Mercennum. Vide ergo num sit cur doleam, cum vos per exprobrationem objicitis propositionem illam forsitan ante obitum Galilæi nondum fuisse inventam, qui tamen vixit usque ad annum 1642. præcipuè, cum jam ad vos scripserim me anno duodecimo jam elapso invenisse. Ut sic mihi tot testes habenti, & cui una sufficere debuit veritas, fidem omnem denegatis. Inventâ infiniti doctrinâ (liceat adhuc eo nomine uti in hac epistola; posthac, absit) eaque, pro tempore satis probè exultâ; ego ad tangentes curvarum animum applicui. Ac primum, vi Analyseos, methodum quandam reperi, quæ, etiamsi longè postea universalis esse deprehensa sit, tamen recens inventa, talis non apparuit: quærebam verò universalem; & particulares methodos (ut adhuc) ubique dedignabar. At trochoides nostræ occasionem dederunt cur ad motuum compositionem respicerem. Occasio satis fuit, ac propo-

fictionem universalem tangentium inde deductam vulgavimus circa annum 1636. Extant adhuc, & circumferuntur hac de re lectiones nostræ à nobilissimo *du Verdu* nostro discipulo collectæ, atque à multis exscriptæ. Itaque jamdudum fide publicâ nobis asserta est talis doctrina, nec alii testes quærendi, qui omnes habeamus. Circa hæc tempora nempe anno 1635, mediante amplissimo senatore Domino *de Carcauy*, cœpi per Epistolas commercium litterarum habere cum amplissimo senatore Tholosano Domino *De Fermat*, de quo quid sentiam habes in ea Epistola quam ad R. P. Merseenum direxi super solido vestro hyperbolico infinito. Is ergo vir præstantissimus, primus omnium, duas propositiones nobilissimas ad nos misit sine demonstratione: alteram de parabolis, alteram de planis helicum, utrisque per omnes dignitatum gradus sumpris. (Ne ergo dubites ampliùs, quis primus tales quæstiones proposuerit; illæ meæ non sunt; quanquam illas ego proprio Marte, inventâ ad id peculiari nostrâ methodo, demonstraverim) immò universalius multò quàm ipse proponas: quippe non solum potestates in helicibus proposuit, sed etiam potestatum radices. Exempli gratiâ: Si in helice semidiametri omnium revolutionum ordine sumptarum, se habeant ut radices quadratæ, aut cubicæ, &c. numerorum ordine naturali progredientium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. quarum primam (quadraticam putâ) reperies in prima revolutione dimidiam partem sui circuli constituere. Cùmque ipsum arduarum (ut tunc) propositionum demonstrationes rogarem, ille in hæc verba rescripsit, *Ego, inquit, ut invenirem laboravi; labora & ipse: in hoc enim labore præcipuam voluptatis partem consistere deprehendes.* Quid facerem à tanto viro incitatus? Laboravi, atque in auxilium infinita nostra advocavi; (nondum enim tunc nostra ampliùs non esse

resciveram) eaque tum primùm ad numeros extendi. Animadverti enim & parabolæ plana, ad sua parallelogramma; & earumdem solida, ad suos cylindros; & spatia helicum, ad suos circulos feliciter comparari posse, si innotesceret in numeris ratio summæ potestatum omnium ejusdem generis, ordine, atque indefinitè sumptarum, ad earum maximam toties sumptam; idque in omni genere potestatum. Quod quidem non difficulter assecutus sum. Illicò idem patuit summam omnium numerorum quadratorum, ordine naturali atque indefinitè sumptorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. ad eorum maximum toties sumptum quot sunt illi quadrati; hoc est ad cubum ejusdem radicis cum maximo illo quadrato collatam, se habere ut 1 ad 3, sive constituere $\frac{1}{3}$; summam cuborum eodem modo sumptorum, ad eorum maximum toties sumptum, sive ad quadrato-quadratum ejusdem radicis cum maximo cubo, se habere ut 1 ad 4, sive constituere $\frac{1}{4}$; summam quadrato-quadratorum, eodem modo constituere $\frac{1}{5}$; atque ita in infinitum. Ex hac propositione quæ sola sufficit, innumera deduxi corollaria, qualia sunt hæc: Summa radicum quadratarum numerorum omnium, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam toties sumptam, collata; putà summa radicum quadratarum horum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. eam habet rationem quam 2 ad 3; summa radicum quadratarum omnium numerorum quadratorum, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam toties sumptam, se habet ut 2 ad 4; summa radicum quadratarum omnium numerorum cuborum, ad maximam toties sumptam, ut suprà, se habet ut 2 ad 5; atque ita in infinitum, radices quadratæ numerorum quadrato-quadratorum, quadrato-cuborum, cubo-cuborum, &c. ad earum maximam toties sumptam, ut suprà, sic

comparabuntur, ut antecedens rationis sit semper 2 exponens quadrati; consequens verò sit summa ex ipso exponente 2 & alio exponente ipsius gradus ad quem pertinent numeri quorum sumuntur radices quadratae. Ut si sumantur radices quadratae numerorum quadrato-quadrato-cuborum qui sunt septimi gradus cujus exponens est 7, erit consequens rationis 9, conflatum ex 2 & 7, & ratio erit ut 2 ad 9. Similiter, summa omnium radicum cubicarum omnium numerorum ordine naturali, hoc est in primo gradu, atque indefinitè sumptorum, ad earundem radicum maximam toties sumptam, se habet ut 3 exponens cubi, ad 4 compositum ex eodem 3 & 1 exponente primi gradus; summa omnium radicum cubicarum omnium quadratorum, ad earundem radicum maximam toties sumptam ut supra, se habet ut 3 ad 5; atque ita in infinitum, radices cubicae omnium graduum, ad earundem maximam sumptam ut supra, comparabuntur; eritque in omnibus antecedens 3, consequens verò componetur ex eodem 3 juncto cum exponente gradus cujus radix cubica sumpta fuerit. Nec aliter radices quadrato-quadratae omnium graduum, ad earum maximam sumptam ut dictum est, comparabuntur, eritque antecedens 4; & sic in infinitum infinities, ut satis ex prædictis patet. Hæc cum ad amplissimum virum scripissèm, dubitavit num eorum demonstrationem haberem. Itaque paucis verbis indicavi eam esse facillimam, per duplicem positionem more Veterum, incipiendo ab unitate, & procedendo ordine per omnes potestates. Quo pacto, facilè est concludere in quadratis, exempli gratià, summam omnium numerorum quadratorum ordine naturali, sed finitè, sumptorum, ad eorundem maximum toties sumptum, collatam, majorem esse quàm $\frac{1}{2}$; at dempto ab eadem summa, seu ab antecedente rationis, ipsorum quadrato-

torum

tortum maximo tantum, remanente integro consequente,
 reliqui rationem minorem quam $\frac{1}{2}$. Nec ad id demon-
 strandum, aliò recurrendum est quam ad genesim qua-
 dratorum, quâ fit ut quivis numerus quadratus compo-
 natur ex proximo quadrato minore, ex duplo radicis ejus-
 dem minoris, atque ex unitate; quemadmodum etiam qui-
 vis numerus cubus componitur ex proximo cubo minore,
 ex triplo quadrati minoris, ex triplo radicis minoris, atque
 ex unitate. Qui quidem cubus est ipsum maximum qua-
 dratum toties sumptum quot sunt numeri quadrati ab uni-
 tate incipientes, atque ita de singulis potestatibus, se-
 cundum uniuscujusque genesim. Corollaria, quomodo
 ab iis deducantur, aliàs, si ita expediat, explicabimus.
 Neque etiam fortassis spernendum videbitur corollarium
 aliud quod ex tali numerorum inspectione deduxi: il-
 lud autem tale est. Propositis quocunque numeris mul-
 titudine finitis, qui ab unitate, secundum naturalem nu-
 merorum seriem procedant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.
 usque ad 100000000 exempli gratiâ; exhibere summam
 quadratorum, aut cuborum, aut quadrato-quadratorum,
 aut cubo-quadratorum, aut cubo-cuborum, &c. om-
 nium talium numerorum: quæ sanè regula, pro quadra-
 tis, & cubis, reperitur specialis apud Authores; at pro
 omnibus potestatibus, nullam apud illos reperimus uni-
 versalem. Hæc ergo fuit nostra pro parabolarum planis
 ac solidis, simulque pro planis helicis, methodus. Post
 hæc proposuit vir amplissimus (quod & ipse jamdiu in
 omnibus figuris universaliter quærebam) prædictarum
 figurarum centra gravitatis invenire. Ac ille quidem
 ad analysim recurrit, nos ad nostra infinita; unde me-
 thodus illius, ut plerisque inventis analyticis accidit,
 abstrusissima est, subtilissima, atque elegantissima: no-
 stra aliquot mensibus posterior, simplicior evasit, & uni-
 versalior; quò fit ut cæteris collata, magis nobis arri-

deat. Ut tamen alicui possit esse universalis, debet is omnibus numeris absolutus esse Geometra, qualis huc usque nullus apparuit. Quoniam verò hoc nostræ hujusce dissertationis præcipuum caput est, ac vos non oblique aut occultè, sed directè & apertè innuistis methodum nostram, quam tamen huc usque nondum vidistis, illius quam circa finem anni 1644. ad R. P. Mercennum à vobis missam legimus, esse inversam, ac proinde nostram à vestra fuisse desumptam; quo posito tanquam vero, adeo indignamini, ut tres maximas epistolas ad amplissimos celeberrimosque viros, adjectis etiam ad id magnis Appendicibus, gravissimis querelis impleveritis; quò nos nihil tale meriros, acerbissimâ plagiarii contumeliâ afficeretis: idcirco & locus & res postulat ut tam atrocem injuriam, quandoquidem & licet & facilè possumus, à nobis propellamus. Ad hoc autem satis superque futurum speravi, si nostram illam methodum ad vos cum demonstratione mitterem; non quidem suis omnibus numeris absolutam, nimis enim longa est, sed sic digestam, ut à vobis, aliisque non vulgaribus Geometris nullo negotio intelligatur; præcipuè ab iis qui indivisibilia non oderint: alios enim nihil moror, & Geometrarum nomine indignos puto, qui viâ apertâ, tutâ, atque facili relictâ, longuos ac difficiles anfractus sequi malint. Hoc pacto, cum illa nostra à vestra planè diversa sit, ac diversis omninò fundamentis innitatur, non erit ampliùs quòd vobis creptam conqueri jure possitis. Eam ergo seorsim cum suis figuris conscripsimus, ne hujus epistolæ lectionem inturbaret.

Facile autem erit animadvertere methodum illam eodem quo proposita est, universalem quidem esse absoluto Geometræ, attamen eandem à priori rarò procedere (universalem autem à priori invenire, hoc est ex sola figuræ aut lineæ definitione, nullâ ejus cum aliâ

quavis figurâ, aut lineâ comparatione factâ, vix sperandum puto : quæ tamen si haberetur, & circuli & hyperbolæ, aliarumque numero infinitarum figurarum quadratum simul haberetur) siquidem illa in figuris, vix solâ plani cum plano aut solâ solidi cum solido comparatione contenta, utramque simul & plani & solidi aut etiam altioris speciei comparationem persæpe requirit. Immo, illâ methodo, solidorum centra vix directè, sed plerumque indirectè tantùm, putà mediante aliquo plano congruo deteguntur. Sed nec illa linearum centris inservit, nisi ipsæ lineæ, earumque proprietates quædam ex præcipuis ac specificis examinari geometricè possint : quæ omnia ex adjectis exemplis post ipsam methodum seorsim videre licet. De methodo Domini *De Fermat*, nisi eam adhuc videris, hoc scies, ipsam trianguli, atque planorum parabolicorum omnium & solidorum ab iis ortorum centra à priori elegantissimè ostendere. Verùm eandem aliarum figurarum centris accommodare, hic labor ; cum ne quidem à posteriori, reliquis figuris huc usque inservierit ; quanquam forsàn, quominus id fieri possit, nihil repugnet. Jam quòd ad tempus attinet, meministi opinor, Vir Clarissime, methodum vestram non ante annum 1644. Parisios missam fuisse, atque eandem tunc admodùm recens inventam : siquidem, ut ex vestris literis patet, vobis eâ adjutis, solidi trochoidis circa basim mensura paulò ante demùm patuerat, quam sub finem anni 1643. nondum habebatis : hæc enim sunt vestra verba in primâ vestrarum ad me epistolâ, *Quoad solida, nihil habeo*. Ego verò meâ methodo usus sum jam ab anno 1637, atque illius ope, & planorum parabolicorum omnium & solidorum centra jam tum invenieram ; quorum centrorum quæ ad dimidios fufos parabolicos pertinent, enuntiavi eâ epistolâ quam ad R. P. Mersennum de vestris inventis scripsi anno 1643,

quo primùm anno de Torricellio Parisiis auditum est. Hæc, inquam, enuntiavi anno plusquàm integro priusquàm vestra illa methodus appareret; quæ vestris forsitan, & nostris, unà cum aliorum inventis (ingeniosè procul dubio) collatis, tandem apparuit. Sed finge id quod non est, ipsam vestram ante annum 1644. fuisse inventam. Finge etiam id quod multò magis non est, ipsam cum nostrâ prorsus convenire, ac planè eandem esse: quid tum? An nos nostram statim ut minime nostram repudiabimus, qui eâ septennio integro ante prædictum illum annum 1644. tanquam nostrâ, immò verè nostrâ nemine reclamante usi fuerimus? Num potius præscriptionis jure nos tutabimur? & quibuscunque intercedentibus, nostram ut nostram lege asseremus, cum in talium rerum possessione, vel unius diei præscriptionem valere, nemo inficiari possit? Multò ergo potiori jure nunc, quandoquidem nostra & tempore longè prior est, & penitè diversâ, intercessoribus valere jussis, & nostra tota manebit, qualiscunque tandem illa sit; & nostram ubique asserere, & fructibus ab ea productis tanquam nostris uti ubique licebit. Sed neque argumenta quæ produxisti, ejus ponderis esse videntur, ut illa quemquam ex iis qui nos vel mediocriter norunt, in tam sinistram de nobis opinionem pertraherent. Primùm enim, dum ais me nunquam ne verbum quidem fecisse de centro gravitatis trochoidis; cum interea tantoperè, & quidem meritò gloriarer de omnibus aliis, quadraturâ, (comparationem cum circulo dicere voluisti) tangentibus, solidis, &c. nec verisimile esse, cum reliqua omnia proponerem, de unico centro gravitatis siluisse; si illud tantùm speravissem; quod quidem problema, tuo judicio, nulli reliquorum posthabendum videtur: dum hæc ais, inquam, Vir Clarissime, ex tuo genio loqueris; nos, dum scripsimus, ex nostro etiam

genio scripsimus. Tu, cùm magnificeres centra, quia ex iis solida deducere posse confidebas, solida autem præcipuè intendebas; idcò centrorum inventionem magnificè extulisti, nec cæteris posthabendam, immò præhabendam judicasti. Ego contrà, quia sine centris solida & quæsi viâ Geometricâ inveni; datis autem solidis, statim, & absque labore centra sequebantur. Ideò centra ne respexi quidem, neque ad ea unquam animum applicui; certus omninò ex præmissa nostra methodo, dato plano quod dudum habebam, sola solida mihi quærenda superesse; centra autem simul cum plano & solidis haberi. Quòd si apologo uti liceat: ego sum *Æsopi* illius *Phrygis* statuarius: plani trochoidis mensura, esto mihi summi *Jovis* statua, mensura solidi, statua *Neptuni*; centrum autem, esto statua *Mercurii*. Jam adsit nobis è cælo sub forma hominis ignoti *Mercurius* ipse, *Jovis* & *Maia* filius; interrogetque, Quanti statua *Jovis*? Indicabo sanè ego alicujus pretii. Interroget deinde de statua *Neptuni*: ego & ipsam alicujus precii indicabo. Tandem interroget de sua ipsius *Mercurii* statua, quid ego? quid autem aliud nisi hoc? Amice, si priores illas duas emeris, tum tertiam hanc auctarium tibi dabo. Itaque, Vir Clarissime, quæ tibi *Jovis* aut *Neptuni* statua meritò fuit, illa nobis *Mercurii* tantum statua extitit. Ignosce, si placet, stylo; hoc usi sumus ut mentem nostram aperiremus. De R. P. *Merfeno*, quid scripserit in ea epistola cujus verba toties repetira contra me adducis, nescio: quid autem illi dixerim ego planè memmini, nec ipse omninò oblitus est; nec etiam illa quæ dixi malè congruunt cum iis quæ sæpius pro te citasti. Sed rursus, nos ex mente nostra locuti sumus; ille, ut intellexit, sic scripsit: vos ex mente vestra interpretati estis; ac illa vestra interpretatio à nostra mente alienissima est. Omnibus tamen at-

tentè consideratis, pace tuâ dixerim, Vir Clarissime ;
 censui præcipuam malæ interpretationis culpam in vos
 recidere : neque enim verba illius, quæ ipse adducis,
 à nostro sensu adeo aliena fuerunt, quin ab iis verum
 illum nostrum sensum faciliè perspexisses, si æqui inter-
 pretis personam tibi assumere voluisses. Scripseras ad
 ipsum te utrumque trochoidis solidum beneficio centro-
 rum priùs inventorum detexisse : ac illud quidem quod
 circa basim, ut se habet reverà, enuntiaveras ut 5 ad 8 ;
 quod ille cùm verum sciret (jam dudum enim ego illi
 tale indicaveram) non aegrè persuasus est, & alterum
 quoque circa axem tale esse quale affirmabas ut 11 ad
 18. Latus itaque statim ille mihi per litteras significa-
 vit habere se quod mecum communicare vellet. Adi-
 vi ; epistolam tuam legi, ac circa illud postremum so-
 lidum tantùm quod circa axem, immoratus sum ; quip-
 pe quod nondum habebam, nisi in terminis vero admo-
 dum proximis, extra quos excurrerat ratio illa à vobis
 assignata 11 ad 18. Hinc ergo, quia de nostris termi-
 nis nullum nobis supererat dubium, illicò animadver-
 timus, rationem illam vestram 11 ad 18 verâ esse mi-
 norem. Cùm igitur super hâc re cogitabundus hære-
 rem, tum R. P. ad me prior, Quid ergo, inquit, di-
 ces de Clarissimo Torricellio ? nonne insignium adedò
 theorematum cognitionem ipsi te debere fateberis ? Fa-
 terer, respondi, si vera essent ; at talia non esse certus
 sum : miror sanè quod vir talis falsum pro vero nobis
 velit obtrudere, nec aliud suspicari possum, nisi quod
 ille Mechanicâ quâdam ratione, per approximationem,
 hujusmodi rationem à vero non admodum-longè aber-
 rantem invenerit, existimaveritque veram rationem non
 posse detegi ; ac proinde suam haud veram esse, à ne-
 mine posse demonstrari. Hæc, inquam ego tum, ora-
 tione, fateor, planè scyticâ ; quam ille suâ ad vos epi-

stolâ lenivit, pro suo genio qui omninò mitis est, ut ex stylo ejus satis perspicere potuistis. Jam, cùm dixi, Faterer me debere, si vera essent; planum est me non intellexisse de solido circa basim quod jamdiu ante vos habebam, & habere me ad vos scripseram; neque de centro trochoidis, quod dato tali solido, unâ cum plano latere non poterat. Intellexi ergo de solido circa axem ac de centro hemitrochoidis quod ab eo dependet, quæ etiamsi brevî habiturum me confidebam, tamen jure præscriptionis, vestra fuissent, si vestra illa enuntiatio cum vero congruisset. Hinc sanè nemo non videt minimè difficile fuisse, ex verbis epistolæ R. Parris quæ vos toties citavistis, verum sensum qualem jam attulimus, elicere : sed nescio quo fato aliter accidit unde lis hæc pro re nullius fere momenti, putà pro nugis nostris, ut ipse sæpe loqueris, inter nos suscepta est. Itaque, ne quid in posterum simile accidar, si tale commercium inter nos continuetur, oro vos ubicunque agatur de propositione Mathematica cujus discussio ad me pertinebit, ne cujuscunque literis fidem habeatis, nisi manu meâ illæ obsignatæ sint : sic enim fiet ut ego meatantum, non etiam aliorum scripta, ex meo sensu interpretari teneam. Nam, pace amicorum hoc dictum esto, hac in materia, soli mihi fidere essuevi, jamdudum expertus, interpretes plerosque, vel dum amicis blandiri appetunt, vel dum rem non satis intelligunt, omnia literis obscurare ac prosùs deformare. Unde qui literas accipiunt, illi, dum vel placitis laudibus ac blanditiis avidè sese ingurgitant, vel quod obscurum est ad placitum sibi sensum detorquent, fit necessariò ut & scribentis & primi authoris verum sensum longè relinquant. Ac hujusmodi quidem allucinationis exemplum afferam ex tuis ipsius litteris, ex proprio tuo sensu, sine interprete ad R. P. Merfennum scriptis, in quibus hæc habes : *Tibi*

verò, vir clarissime, corollariolum mitto ex ipsis hyperbolis deductum. Quadratura quedam est, quarum centenas, immò infinitas poteram mittere, nisi vidissem satis superque esse unam, ut statim omnes emergant. Deinde in iis quas ad nos scribis, quas ipse R. P. etiam ante nos legerat, hæc habes : *Si unius hyperbole primariæ quadratura tam diu quesita est, nos pro una infinias damus.* Ex quibus verbis statim existimavit R. P. primariæ hyperboles quadraturam à te inventam fuisse. Itaque cum aliquo post tempore, de ipsis quadraturis cum eo colloquerer, diceremque non difficulter illas assecutum esse me : Habes ergo tandem, inquit ille, hyperbolæ conicæ quadraturam ? Nequaquam, respondi ; neque enim legitima hæc, & nothæ illæ iisdem legibus addictæ sunt. Me misellum, inquit, quantâ spe decido, qui ubi Cleopatrarum aut etiam majoris prætii unionem speravi, ibi vitreas tantum ampullas reperio ! Sed de hoc ipse forsan rescribet : ego verò ideo scripsi, ut tali exemplo monerem hac in materia non esse tutum interprete uti ; cum etiam absque hoc tantæ eveniant alucinaciones. His ergo nostris rationibus, acerbissimæ vestræ accusationis argumentis luculenter respondisse, atque cumulatè satisfecisse speramus. Nunc verò.

Aspice num mage sit nostrum penetrabile telum ?

Videamus, inquam, nunc, num sit quod de vobis multò potiori jure queri possim. Ac primùm. Nonne vos trochoidem nostram, postquam & à R. P. Merfeno & à nobis moniti estis, jam à multis annis eam nostram esse, eamque brevi à nobis in lucem emittendam, postquam vestris ad ipsum R. P. & ad me literis polliciti estis vos talem messiem nobis relicturos intactam, tamen omni jure, ac vestrâ etiam fide violatis, tanquam vestram non literis modo manuscriptis (quanquam neque hoc ferendum

ferendum fuerit) sed libello ad id praelis commissio, vulgavistis? idque interim, ac eodem prorsus tempore quo continuis vestris literis contraria promitteretis? Hæcine vestra religio? hæc consuetudo? Quod si ego huc usque de tali injuria pro rei acerbitate questus non sum, fateor, soli ne id facerem evicerunt communes amici. Quid autem lucri feci illis obtemperando? nempe crevit vobis fiducia, quia me bardum, qui illatarum injuriarum nihil sentirem, existimavistis. Attamen si ad paucula verba quæ super hæc re ad vos scripsi animum adverteritis, facile ex iis percipietis de me dici posse:

Vultu simulat : premit altum corde dolorem.

Nonne ergo ipse prior idem quod vos, sed non absque causa clamare debui, *Vim patior; incredibile est quanto desiderio expectem responsum super hac re.* Quibus sanè verbis, ac multò etiam pluribus cùm ad R. P. Merfennum tum ad amplissimum D. de Carcavy scriptis, non obscurè significavistis vos, nisi coram vobis purgati fuerimus, in nos acerbius quidpiam omninò statuisse; ut sic & injuriâ, & multâ simul afficeremur. Sed de hoc satis: nunc ad alia capita transcamus.

Rursus igitur, nonne primus omnium parabolas ego cum helicibus comparavi secundum longitudinem? Nonne jam annus quintus excurrit, ex quo theorema vulgavi, idemque meo nomine praelis mandavit R. P. Merfennus? Nonne vos ab amicis rescivistis, ac tum demum anno 1645. ad id animum applicuistis? Habeo sanè super hæc re vestras ad vestros amicos Romanos literas vestrâ manu ac vestro idiomate scriptas. Quid tum? Jam vos palam, omnibus ferè vestris literis gloriamini, non solum parabolam conicam cum helice Archimedeâ comparasse, sed & reliquas parabolas cum propriis suis helicibus, immò & quemlibet helices arcum vel partem,

five ex centro incipat five non, & five primam revolutionem excedat five non, demonstrasse cuidam lineæ parabolicæ esse æqualem. Quid hoc rei est? Gloriaris de rebus nostris tanquam si tuæ illæ sint; atque id postquam nostras esse sic rescivisti, ut nisi rescivisses, nequidem de illis forsan unquam somniasses. Nec est quod fingas existimasse te nos solam helicem Archimedeam considerasse; nimis enim frigidum fuerit figmentum, & absque ullo fundamento; cum una eademque sit illius & cæterarum, demonstrationis via & methodus, quam qui invenerit, omnia procul dubio invenerit, si modo voluerit, nempe hæc, Quævis parabola unà cum helice sibi propriâ sic se habet, ut si portio axis parabolæ, comprehensa inter ordinatim applicatam, ad axem, & tangentem à termino applicatæ ductam, æqualis esse intelligatur circumferentiæ circuli primæ revolutionis in helice: (intellige helices planas; nos enim conicas quoque cum parabolis comparavimus) applicata autem æqualis semidiametro ejusdem circuli: tum, quæ inter verticem & applicatam interjicitur parabola, æqualis sit longitudine helici primæ revolutionis. Quod si in eadem parabola sumatur à vertice quævis portio; à principio autem helicis propriæ sumatur etiam portio, à cujus termino ducta recta ad helicis centrum, æqualis sit rectæ à termino sumptæ portionis parabolæ ad axem applicatæ: erunt & hæ portiones æquales. His sic à nobis inventis, si quis quidpiam addiderit; aut si imitando similia effecerit, habeat sanè quam ipse laudem merebitur. In helicibus conicis existente cono recto, omnia se habent ut suprâ; modò tantum loco semidiametri circuli primæ revolutionis, qui circulus in ipso cono existit, sumatur recta à vertice conici ad circumferentiam ejusdem circuli terminata. Hic autem, centrum helicis erit vertex conici; & quæ à centro ad puncta helicis du-

cuntur rectæ, erunt portiones laterum conij ejusdem. At equidem rescivisse me fateor, dices. Verùm demonstrationem proprio Marte adinveni. Esto: quid inde? Sanè si quæstionem proposuisses tantùm, non etiam solvissem, illa tua fuisset, qui prior solvisses: nunc quando prior solvi ego, & solutam vulgavi, mea est; nec mihi, etiamsi omnes conentur, verè eripi potest. An, quæso, meæ aut etiam vestræ sunt parabolæ Domini *De Fermat* quadraturæ? aut spatiorum helicum cum circulis comparationes, quas ambo proprio Marte invenimus? Quid de ipsis speretis vos, nescio sanè: ego certè, quanquam mea multò quàm vestra potior sit causa, ipsam tamen prorsus defero. An meum est solidum vestrum hyperbolicum? an mea hyperbolarum vestrarum novarum quadratura? minimè verò; attamen amborum ipsorum theorematum demonstrandorum una eademque est methodus, quam nos invenimus, & jampridem ad vos misimus vestro solido accommodatam, quamque iisdem hyperbolis accommodare non admodum difficile est. Reperi quoque in illarum singulis, ex parte unius tantùm ex asymptotis, rescari posse spatium planum acutum & versùs acumen infinitum, quod tamen spatio finito atque undique clauso sit æquale. Obiter autem, ut verum fatear, nonne istis hyperbolis occasionem dedere parabolæ illæ Domini *De Fermat*? Nonne etiam illa nostra propositio de helicibus & parabolis longitudine æqualibus ansam præbuit illi alteri de qua adeò magnificè gloriaris? de illo, inquam, helicum genere quæ describuntur, dum recta uniformiter quidem circa manens centrum circumvolvitur, at punctum interim secundùm illam rectam fertur proportionaliter, quam quidem helicem rectæ cuidam asseris æqualem? Quæ autem sit illa recta, & quomodo ad datas se habeat, tanquam si Cereris Sacrum sit, planè reticuiisti. Non ta-

men nos later, eam æqualem esse hypotenusæ cujusdam trianguli rectanguli, cujus unum laterum æquale sit rectæ à centro ad terminum helicis ductæ: sed enim, quis triangulum istud dabit, ex hypothesi quod dentur positione & longitudine duæ ex iis rectis quæ à centro ad helicem terminantur? vel contrà, quis triangulo dato, dabit helicem? Utrumque si dederis, Vir Clarissime, vel alterutrum tantum, ego munus id eo munere compensabo, quod vel ipse duplo plus facias. Sed cave: hîc via præceptus est & lubrica; ac talis, ex qua ad parallogisimum lapsus sit facillimus: nisi tamen quod perimus datum fuerit, propositio nullius pretii remanebit. Illud etiam non videris animadvertisse, propositionem hanc non esse novam, sed ipsam prorsus eandem esse cum antiqua illa, quâ quaritur linea per quam pondus ad centrum terræ laberetur secundum uniformem ad suum horizontem inclinationem; talis enim linea ad tale genus pertinet. Quàm verò minimè nova sit propositio, testabitur ipse R. P. Mersennus. Verum, quia datâ inclinatione, hoc est, dato specie triangulo rectangulo, datoque centro helicis in centro terræ, dato insuper uno ejusdem helicis puncto, putà in ipsius terræ superficie; non poterat geometricè, nec etiam suppositâ circuli quadraturâ, assignari aliud in ea punctum; idè illa inculta permansit, ac ferè ex toto neglecta est. Neque rursus, idem solum aut primum genus est earum helicum, quæ finitæ cum sint, infinitas tamen circa punctum quoddam revolutiones absolvunt: tales enim & longè antiquiores sunt illæ quæ in globis terrestribus atque in mappis mundi, loxodromias seu ventorum vias referunt, quæque præter has illud habent peculiare, quòd ex utraque parte finitæ sint; & tamen circa utrumque polum infinities circumvolvuntur. Cumque sic imitando, res Geometricæ in infinitum plerumque abeant,

quidni etiam linea recta circa manens centrum æqualiter vel proportionaliter circumvolvetur, ac simul punctum mobile vel æqualiter vel inæqualiter secundum rectam eandem legibus quibusdam feretur vel à centro, vel versus centrum, ad describenda infinitè infinita helicum genera? Ex iis autem, genus illud novimus, cujus helices hyperbolis conicis demonstrantur æquales, quidni rursus licebit, pro infinitis hyperbolis effingendis, imitari vigesimam primam propositionem libri primi Conicorum Apollonii, sicuti pro infinitis parabolis vigesimam propositionem imitatus est D. *De Fermat*? Verum hinc omnia persequi nec lubet nec vacat. Superest unum expositulationis nostræ caput circa novas nostras quadratrices lineas, quas non ita pridem, vix scilicet ante biennium invenimus, nec multò post ad vos misimus. Possem hinc, & sanè potiori jure, eadem verba adjicere quæ vos circa centra gravitatis: *Utinam non misissem*; sed illa nimis acerbam, prorsusque contumeliosam præ se ferunt exprobrationis speciem: quin contrà, & misisse lætor; quandoquidem ita vobis placuerunt; & nisi tunc misissem, nunc utique mitterem. Illas, inquam, lineas ex quibus fiunt spatia plana longitudine infinita, quæ tamen spatiis finitis undique clausis sunt æqualia; vos lineas Robervallianas, ab inventoris nomine, vocavistis; ego voco quadratrices, ab earum officio, & inventionis fine: ego enim figurarum quadraturæ intentus, dum nihil negligo eorum quæ ad propositum illum finem conducere videntur, præcipuè verò ipsarum figurarum in alias figuras transmutationem exprior; in tales lineas incidi hac ratione.

Esto in figura, trilineum ABC quale requiritur, cujus punctum B sit vertex; recta AB altitudo; recta AC basis; & linea BC sit quæcunque curva: nihil enim refert qualiscunque accipiatur. Verum, ut ex infinitis

*Supple re-
ctam lineam
BC à puncto
B ad pun-
ctum C duc-
tam.*

generibus aliquod hic eligamus, quod vobis instar om-
nium sit, esto illa curva BC ad easdem partes cava, pu-
tâ ad partes ductæ rectæ BC, ita ut ipsa tota sit extra
triangulum ABC, & eadem à puncto B ad punctum C,
continuè recedat à rectâ BA, & ad rectam CA propiùs
accedat; sumpto utroque, recessu scilicet & accessu,
secundùm perpendiculares à curva BC ad rectas BA,
AC ductas. Tum in ipsa curva BC, sumantur continuè
à vertice B, quæcunque & quotcunque puncta D, E,
&c. à quibus ductæ intelligantur rectæ DF, EG, &c.
tangentes curvam BC in iisdem punctis D, E, &c. at-
que occurrentes axi AB producto ultra verticem B, in
punctis F, G, &c. Intelligatur quoque per punctum C
recta CK tangens eandem curvam BC in puncto C; quæ
quidem recta CK vel eidem axi AB occurreret ultra ver-
ticem B, vel eadem CK eidem AB erit parallela, coin-
cidetque cum rectâ CR, quam ipsi AB ponimus esse pa-
rallelam. Præterea, à punctis D, E, &c. ducantur re-
ctæ DI, EH axi BA parallela, atque occurrentes basi
AC in punctis I, H, &c. & per punctum A, ipsis tan-
gentibus DF, EG, &c. ducantur totidem rectæ ordine
parallela, AM quidem ipsi DF; AL autem ipsi EG,
&c. occurratque recta AM rectæ DI productæ in M,
atque ita habebimus punctum M: occurrat quoque re-
cta AL rectæ EH productæ in L; atque ita rursus ha-
bebimus punctum L & sic de cæteris. Quo pacto habe-
bimus à puncto A infinita alia puncta continuo ordine
disposita M, L, &c. Per hæc intelligatur ducta linea
continua AML &c. illa erit primaria nostra quadratrix;
primariam vocamus, quia ipsa prima occurrit, & prima
à nobis vulgata est; cæteræ autem ab illa primaria, sal-
tem per occasionem, dependerunt. Quòd si tangens CK
occurrat axi AB, ductâ rectâ AN parallelâ eidem CK,
& productâ rectâ RC donec ipsi AN occurrat in N,

spatium ABC in infinita trilinea resolvi concipiatur :
 quæ quidem trilinea totidem rectis AD , AE , &c. ac
 portionibus interceptis curvæ BC comprehendantur ; spa-
 tium autem $ABCN$ in totidem quadrilinea resolvatur ,
 quot sunt trilinea quæ quadrilinea à parallelis DM , EL ,
 &c. ac portionibus interceptis curvarum BC , AN con-
 stituantur : erunt ergo singula trilinea cum singulis qua-
 drilineis, super eâdem basi constituta ad puncta D , E , &c.
 propter tangentes, (absque tangentibus enim falsum esset)
 atque in iisdem parallelis ; putà trilineum ad AD cum
 quadrilineo ad DM , in iisdem parallelis DF , MA ; trili-
 neum autem ad AE , cum quadrilineo ad EL in iisdem pa-
 rallelis EG , LA , atque ita de reliquis. Quapropter sin-
 gula quadrilinea singulorum trilineorum erunt ut du-
 pla, ex legibus infiniti ; & omnia omnium, hoc est to-
 tum spatium $ABCN$ quod ex omnibus quadrilineis con-
 stat, duplum erit totius spatii ABC , quod constat ex
 omnibus trilineis. Patet autem eodem ratiocinio, qua-
 drilaterum $ABDM$, trilinei ABD duplum esse ; & qua-
 drilaterum $ABEL$, trilinei ABE , & sic de cæteris. Si
 ergo trilineum $CAMLN$ totum extra trilineum ABC
 existat, ut in assumpto exemplo, erunt duo illa trili-
 nea æqualia, sive punctum N in infinitum abeat, sive
 non. Quòd si prætereà, eo casu quo curva $AMLN$ to-
 ta extra trilineum ABC existit, ex punctis D , E , &c.
 ducantur rectæ DX , EV basi CA parallelæ, atque axi
 occurrentes in punctis X , V , &c. fient spatia BDX ,
 BEV , &c. spatiis AIM , AHL , &c. singula singulis
 æqualia. Quoniam enim, ex demonstratione universali
 præmissa, totum quadrilineum $ABDM$, totius trilinei
 ABD , duplum est ; & ablatum parallelogrammum $AX-$
 DI , ablati trianguli AXD est quoque duplum, erit &
 reliquum reliqui duplum : reliquum autem primum con-
 stat ex duobus trilineis BDX , AIM ; secundum verò est
 solum

folium trilineum BDM : quare duo illa trilinea BDX, AIX simul, hujus folius BDX dupla sunt, ac proinde æqualia sunt inter se trilinea illa BDX, AIM. De cæteris eadem est demonstratio. Sed & trilineum BDF bilineo AM, & trilineum BEG bilineo AL, æquale esse facile demonstrabitur; & multa alia quæ consultò omitimus. Potest quoque ad solida extendi hoc nostrum inventum; si scilicet, prædictæ omnes figuræ circa axem AB utrinque productum quantum satis, convertantur; ac spatia quidem solida ad rectas AD, AE, &c. constituta, pro pyramidibus; spatia autem solida ad parallelas DM, EL, &c. pro parallelepipedis accipiantur. Quo pacto solidum descriptum à quadrilineo ABCN, sive illud versùs N infinitum sit, sive non, triplum erit solidi à trilineo ABC descripti : & solidum à trilineo ACN in assumpto exemplo descriptum, duplum erit solidi à trilineo ABC descripti; & hinc habentur innumera species solidorum infinitè finitorum.

Possunt etiam rectæ MI, LH, &c. produci versùs puncta D, E usque ad puncta T, S, &c. ita ut rectæ IT, HS, &c. æquales sint rectis DM, EL, &c. & per puncta B T S, &c. potest intelligi curva quadratrix B T S: hæc autem illa erit quam ad vos misimus; de qua ideò nihil est quod hîc addamus : quòd autem illa secundaria sit, manifestum est.

Tandem, ductis tangentibus DF, EG, &c. ut suprà; potuit loco puncti A assumi aliud quodcunque punctum B vel C, vel quodvis in plano trilinei ABC quantumvis producto existens, per quod ducerentur rectæ tangentibus illis parallelæ; quemadmodum hîc ductæ sunt AM, AL, &c. & per puncta D, E, &c. duci quoque potuerunt totidem aliæ rectæ inter se & cuivis datæ parallelæ, quæ cum tangentibus & tangentium parallelis parallelogramma constituerent, qualia sunt AFD M,

AGEL, &c. unde aliæ infinitæ generabuntur quadratrices : sed hæc nunc indicasse sufficiat. Vides itaque, Vir Clarissime, quàm latus hoc loco ad imitandum pateat campus. Vides etiam alia prorsùs à tuis hyperbolicis diversa genera solidorum, & multitudine innumerable, & illis forsan, magis miranda ; eo quòd hæc nostra de externa sua latitudine nihil unquam remittant, ut vestris necessariò accidit. Neque tamen nostra nos ad vestrorum imitationem effinximus (quod si factum fuisset, quantumcunque abstrusa, vobis tamen tribueremus) sed hæc à nostro linearum quadraticarum invento sic dependerunt, ut ab illis sejungi non potuerint. Vides denique nos nec plana, nec solida infinitè finita præcipuè intendisse ; sed nostras quadratrices, quæ ex figurarum in alias transformatione nascuntur, ex quarum origine talia spatia necessariò consecuta sunt ; & nobis aliud animo agitantibus, sese ultro obtulerunt.

Jam, quadratura parabolæ quomodo ex prædictis facile deducatur, sic ostendimus. Intelligatur in hoc nostro exemplo, curva BC esse quævis parabola, sive conica illa sit, sive alia : (unica enim omnibus inservit demonstratio) cujus axis sit AB ; vertex B ; basis AC ; & recta BY ipsam tangat in vertice, occurratque rectæ NC productæ in puncto Y, ut sit parallelogrammum ABYC spatium trilineum parabolico ABC circumscriptum. Ducantur etiam, vel duci intelligantur à singulis punctis curvæ AMLN, putà à punctis M, L, N, &c. rectæ MQ, LP, NO, &c. basi AC parallelæ occurrentes axi BA producto in punctis Q, P, O, &c. quo pacto, constituetur aliud quoddam trilineum ANO, cujus axis erit AO, vertex A, & basis NO. In hoc trilineo, rectæ ad axem ordinatim applicatæ erunt MQ, LP, NO, &c. quæ ordinatim applicatis in parabola, DX, EV, CA, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis, erunt æqua-

les; at portiones axis AO inter verticem A , & applicatas interceptæ, putà AQ , AP , AO , &c. æquales erunt rectis FX , GV , KA , &c. singulæ singulis debito ordine sumptis: quæ omnia ex constructione manifesta sunt. Est autem in quavis parabola, ut FX ad XB , sic GV ad VB , & sic KA ad AB , propter tangentes DF , EG , CK . Quare erit quoque, positâ in nostro exemplo quâvis parabola $BDEC$, ut AQ ad BX , ita AP ad BV , & ita AO ad BA , &c. Est ergo curva $AMLN$ parabola ejusdem speciei cum parabola $BDEC$; cùmque AC , ON sint æquales, erit spatium AON ad spatium ABC , ut axis AO ad axem AB . Ostensum autem est spatium ABC æquale esse spatio ACN ; quare spatium AON ad spatium ACN est ut AO ad AB : & componendo parallelogrammum $ACNO$ ad spatium ACN , sive ad spatium ABC , se habet ut recta OB ad rectam BA . Sed ut parallelogrammum AY ad parallelogrammum AN , ita recta AB ad rectam AO ; ergo, ex æquo, in ratione perturbata, erit parallelogrammum AY ad spatium ABC , ut recta OB ad rectam AO . Datae autem sunt rectæ illæ OB , AO , quia AO ipsi AK datae æqualis est, ex constructione: ergo data est ratio parallelogrammi AY ad spatium trilineum parabolicum ABC , ut propositum est; & est talis ratio ut recta composita ex AK & AB , ad rectam AK .

Simili ratiocinio, in solidis ipsarum parabolæ circa axem AB conversarum, concludemus universaliter sic esse cylindrum AY ad solidum ABC , ut recta composita ex AK & dupla ipsius AB , ad ipsam eandem AK .

Quomodo ergo in ejusmodi quadratrices inciderim, jam tenes: quàm verò ingenuè ad vos miserim, ipsi scitis: sciunt & Academiae nostræ procures, qui omnes epistolam nostram, antequam ad vos mitteretur, perlegerunt; sciunt & multi alii cum quibus eandem ego, vel amici communicavimus; sciunt, inquam, illi omnes,

N n n ij

me expressis verbis, veluti florem quemdam ex horto illo delectum, vobis indicasse quadraturam parabolæ primariæ seu conicæ. Quis igitur meo loco constitutus, fore speravisset ut Clarissimus Torricellius, inde per imitationem, cæteras parabolas quadrandi arreptâ occasione, (quod nullius fuit negotii, quia una eademque est omnium methodus) hæc verba subjiceret: *Prædictæ methodi, tum pro quadraturis, tum pro tangentibus, sunt quas minimi præ ceteris ego facio; non tamen patiar mihi illas eripi.* Et hæc: *Linea Robervalliana, si ortum ducat ex aliqua parabolæ, semper parabola evenit ejusdem speciei; quod ego novum esse scio, licet fortasse turpe videatur hoc fateri.* Et rursus in alia epistola: *Quadraturas ad Clarissimum Robervallium mitto, fortasse ad subeundam eandem fortunam cum meo centro gravitatis cycloidis, hoc est trochoidis.* Atque ita, sicuti palam nos accusaverat Torricellius, tanquam si centrum illud nostræ trochoidis, à nobis illi surreptum fuisset, sic timere se simulavit, ne eodem fato illæ suæ (si Diis placeat) parabolæ quadraturæ sibi à nobis eriperentur. Quis, inquam, hoc speravisset? Nam, Deum Immortalem! quid illis in quadraturis aut novum est aut ad Torricellium pertinet, ut ei possit eripi? An in universum quadraturæ illæ sunt Torricellii? Nequaquam. Primariæ enim sive conicæ parabolæ quadratura Archimedis est; cæterarum autem, D. *De Fermat*: dico D. *De Fermat*; quia cæterarum illarum medium à medio Archimedis planè diversum est, & diversum esse debuit, quandoquidem ad illas, medium Archimedeum omnino ineptum est. Quòd si omnibus illud aptum fuisset; tunc, quantumvis ab eo diversum esset medium D. *De Fermat*, omnes tamen illas quadraturas uni Archimedi tribueremus, ac cæteras per imitationem inventas ad primariam remitteremus. Si quidem facile est in-

ventis addere : authorem verò sese prabere, hoc opus hic labor est. Non igitur aut Torricellii, aut nostræ sunt parabolæ quadraturæ in universum; nec illæ aut ipsi aut nobis eripi possunt. Superest igitur ut de medio decertemus. Sed ad quid hoc? Quando, sive ego vicerò sive Torricellius, ipsa res vel Archimedi cedit, vel D. *De Fermat*. Attamen quod in eo medio præcipuum est, nostrum est, ipso Torricellio concedente, nempe nostræ quadratrix, quam ipse Robervallianam vocat. Quid igitur ipsi relinquitur? Forſan, inquit aliquis, vult Torricellius suum esse, quod usus fuerit complementis æqualibus parallelogrammorum, eaque prædictis Robervallianis quadratricibus accommodaverit, ut duplici positione inscriptorum & circumscriptorum uteretur more Veterum. Atqui ob tantillum, quod nec ipsum universale est, adeo sollicitum esse, adeoque invigilare ne sibi eripatur, pauperis cujusdam est, qui hoc unum possideat, non autem ditissimi Torricellii, qui infinitos rerum multò pretiosiarum possidet thesauros. At, dicet alius: Robervallius unicam parabolam primariam seu conicam, Torricellius verò omnes omninò quadravit. Robervallius scilicet unicam! Quis autem nos usqueadeo cæcos existimaverit? præcipuè cum una eademque sit omnium methodus quam suprà ostendimus? Ego ne in eo quod difficilius fuit, si tamen quid ibi difficile dici potuit, nempe in quadratricibus ipsis detegendis, atque in primaria parabola quadratura præspicax; in facillimis repentè cæcutiero? Quin ergo saltem enuntiavisti? Satis fuit unam enuntiare; cæteræ sponte sequebantur. Quid hoc rei est? An tandem ego ea omnia ignorasse censebor, quæcunque unicam quam ad Torricellium scripsi epistolâ expressis verbis non comprehendidi? Respiciat ille ad verba nostra, ut quid voluerimus intelligat: florem mittebamus, non arborem. Ac jam

decennium est ex quo absolutis nothis illis parabolis, vix animo occurrit, nisi urgeat occasio, ut illas amplius nominem; Torricellio verò ipsæ novæ sunt, adeoque ipsarum ille non obliviscitur, ut magnum quid putet, si centum modis illas quadraverit, cum tamen infinitis id fieri possit. Rursus ergo, quid in illis quadraturis novum est quod ad Torricellium pertineat? Non video sanè: attamen scire gestio, ne quod illius est, quodque sibi eripi minimè passurum esse minatur, imprudentes auferamus.

Jam perspiciat quicumque Torricellii legerit epistolas, quàm multa præteream legitimæ expositæ capitula. Enimverò, illud ne viro ingenuo ferendum fuit, quod nobis comminando scripsit super aliâ quâdam methodo centrorum gravitatis inveniendorum, quam habere se gloriatur? *Oro vos, inquit, ne inter vestra hanc etiam habeatis: nam hoc esset tollere penitus omne litterarum, scientiarumque commercium.* Quid aliud ad manifestum furem scribi potuit? Interim tamen, de illa methodo callidè ac de industriâ tacuit Torricellius: ita ut si aliquam ego aut alius quispiam proferamus, jam ipsi liberum sit illam astutiis ejusmodi, atque in longum prospicientibus verbis, sibi asserere, ac de ea locutum esse se, suâ fide affirmare.

Quis rursus feret quod ad R. P. Merfennum scribit, cum de centro nostræ trochoidis loquitur? *Quod certè (ait) immò certissime scio non habuisse Robervallium, antequam demonstrationem meam videret; ut P. V. vel ipsemet, vel tandem universa Europa testis esse pòterit.* De centro illo jam satis suprâ, immò usque ad nauseam; nec circa illud universa Europa testis nobis formidanda; quin, si fieri posset, præ cæteris optanda. Verùm, quid tale centrum ad universam Europam? Crede mihi, Clarissime Torricelli; esto (quod tamen sine arro-

gantia dici non potest) quòd in rebus Mathematicis ambo sumus egregii ita ut paucos pares, nullos agnoscamus superiores: nequaquam tamen, hoc pacto, tales erimus quos universa respiciat Europa; nempè misellos Geometras de nescio quo puncto disceptantes. Simus potius ambo, ego triginta millium peditum nostrorum veteranorum dux, tu totidem vestrorum: adsit utrique equitatus tali numero debitus, nihilque desit armorum, annonæ, aut fidei militum erga duces; ac tunc universa forsan nos respiciet Europa.

Hoc loco, Vir Clarissime, cogitare subiit quí fieret, ut cùm semel ad te scripserim (prima enim alia nostra de te epistola ad R. P. Mersennum directâ fuerat) idque stylo qui meo & amicorum iudicio, nihil omninò acerbi, quanquam post ereptas à te nobis nostras trochoides, redolet; ipse tamen è contrario, acri adeò stylo rescripseris; nec mihi soli, quo pacto facilius res componerentur, sed tribus (nescio num etiam pluribus) literis ad amplissimos celeberrimosque viros de me scriptis, haud alio argumento quamquòd existimares (nimis tamen leviter) centrum trochoidis ipsius tibi fuisse ereptum. Tantusne Torricellio earum quas suas putat, nugarum zelus (liceat eo tibi familiari nugarum vocabulo uti) ut statim atque eas sibi ereptas putaverit,

Irruat & frustra ferro diverberet umbras,

ne quidem cogitando quantas ille, cùm directè, tùm indirectè, ab aliis sumpserit, ob quas periculum sit ne quamvis placidos acrius irritando, ipse vicissim pœnas luat? Atqui consentaneum erat, vir prudens cùm sit, ut meminisset hujus præcepti, quod qui dedit, is procul dubio fuit ad unguem factus homo; videlicet,

*Qui, ne tuberibus propriis offendant amicum
Postulat, ignoscat verrucis illius.*

Equidem, inter plurimas hujusce tam acris styli causas, hæc nobis videtur probabilior, quod tu, Vir Clarissime, spatium Mathematicum ingressus, seu fato seu sponte, viam à nostris jam à ante plures annos tritam inieris, à qua huc usque parùm deflexeris; unde non mirum est si in easdem stationes, littora, portus, fluvijs, & regiones incidas, quibus illi dudum detectis nomina indiderunt, eaque omnia in chartas intulerunt: ipse autem, cum illa à te primùm detecta existimes, fit ut postea indigneris si quis contrarium asseruerit, atque id quod verum est candidè enarraverit. Memineris ergo spatium illud infinities infinitè infinitum esse, idemque solidum, immò etiam plusquàm solidum, tibi verò nec pedes, nec pennas, nec alas deesse: deflectas ergo paululùm vel ad dextram, vel sinistram, vel suprà vel infra: curre, nata, vel etiam vola: hæc enim potes omnia, quæ sanè

*pauci, quos æquus amavit
Jupiter, aut ardens evexit ad æthera virtus,
potuere;*

sic enim fiet, ut, quod non semel, immò pluries jam præstitisti, & novas regiones deregas, & viros doctos non solum ad eò feliciter imiteris, quanquam nec ipsum laude caret; sed, quod multò laudabilius est, te ipsum viris doctis præbeas imitandum.

Huc usque pro nobis plura diximus: nunc pro divino Archimede pauca liceat. Bis, ut tua excuses, tantum virum in discrimen adducis, Vir Clarissime; semel pro libris tuis de motu projectorum; iterum autem, pro illâ tuâ minimè verâ ratione solidi trochoidis circa axem, ad suum cylindrum ut 11 ad 18. Ac primùm quidem, pro libris de motu projectorum hæc ais: *Archimedes supposuit olim projecta, non per parabolas sed per lineas spirales*

spirales suas procedere. Hanc Archimedis suppositionem nullibi videre licuit in ejus operibus : commentarios autem, forsan, non omnes legi ; sed nec eorum auctoribus licuit tanto viro absurdas ejusmodi suppositiones affingere. Deinde, pro excusando vestro illo fictitio trochoidis solido, hæc scribis ad R. P. Mercennum : *Habemus apud Archimedes, prop. 2. de circuli dimensione, circulum ad quadratum diametri esse ut 11 ad 14 : quero ab ipso (Robertwallio, supple) undenam putet me habuisse rationem quam ad numeros 11 & 18 reducebam ?* Quæ post verba illa sequitur linea, solitam totius epistolæ redolet acerbiter. Equidem Archimedes hæc habet : at non dissimulavit statim (nempe propositione tertiâ, quæ manifestò lemma est ad illam secundam) talem rationem 11 ad 14 non esse accuratam, sed tantum veræ proximam : apud vos autem nihil tale habetur ; sed vestram illam rationem 11 ad 18 tanquam accuratam proposuistis, ex invento prius centro tanquam accurato deductam : immò, illam pro accurata exceperunt quicumque existimaverunt vos adèò candidos esse, ut nefas existimaretis ea enuntiare quæ vera non essent. Enimverò, Vir Clarissime, plerique ex nostris vix persuaderi potuissent, Torricellium nobilem adèò Geometram, aliquid purè Geometricum sine demonstratione affirmare voluisse. Sed nec illa vestra ratio 11 ad 18 ex terminis vero proximis ab Archimede assignatis pro circuli dimensione deducta est, cum eadem extra ipsos terminos longè evagetur ; unde non video quid vobis hîc proficiat Archimedis autoritas, præcipuè in materia purè Geometrica, ubi pro errore accipitur quidquid accuratè verum non est, quantumcunque illud ad verum proximè accedereprehendatur.

Hic fieri posse video, ut aliquis hujusce nostræ epistolæ stylum ideò carpat, quòd ille nec amico, nec ad-

versario convenire videatur ; ut potè qui pro amico , acrior , pro adversario contrà , lenior quàm par sit appareat . Equidem , Clarissimum Torricellium adversarium habere absit ut unquam optaverim ; adversarius sanè illi ego ero nunquam , nisi ipse prior talem me effecerit . Quòd autem amicum & cupierim & adhuc cupiam , argumentum certissimum est , quòd prior amaverim , ac nomen ejus celebre per Galliam , quàm maximè potui , reddiderim . Siccine ergo (urgebit censor) cum amicis tuis te gerere solitus es ? Primum quidem , apologiam contra acerbam ipsius accusationem mihi debui ; deinde metui (fateor) ne ipse quem summopere amicum mihi cupio , exillis esset qui aliena veluti perspicillis cavis respiciunt ; sua , convexis aut iis forsàn quæ plurimis faciebus distinguuntur , unde fit ut iidem aliena contractiora , sua verò ampliora aut numerosiora , aut etiam pulchris coloribus ornatiora quàm sint reverà videre videantur . Itaque admonere cum volui officiosè , ut amorem proprium alieno temperaret . Ac , ne ad excitandum duriusculus haberetur , stylum adhibui utcunque acutum & mordacem : sic enim fore speravi ut sapiens cùm sit , se ab amante pungi sentiret , atque ita ad redamandum acriùs incitaretur . Quanquam autem tot paginas minimè inutiles fore spero , doleo tamen quòd illas in tractando ejusmodi ingrato ac planè tædiofo argumento insumere oportuerit ; cùm alia ferè innumera longè suaviora , ac viris doctis , ut puto , acceptiora , cùm ex nobis , tùm ex nostris habeamus ; qualia sunt quæ sequuntur . Circa analysim quidem , de æquationum recognitione , & emendatione , novà prorsus methodo , de earumdem determinatione ac de ipsarum per locos proprios resolutione , atque compositione . Circa Geometriam , de locis planis , solidis , atque ad superficiem ; ubi in specie , restituta habemus loca solida ad tres &

quatuor lineas: de cylindris, & conis isoperimetris, cùm demptâ base, tum additâ: de iisdem sphaeræ inscriptis, & circumscriptis, seu spatiorum solidorum, seu etiam superficierum tantum habeatur ratio; ubi mirabere forsitan quâ ratione à nobis concludi potuerit, positâ sphaeræ diametro $3\frac{1}{2}$ partium, axem coni inscripti cuius superficies comprehensa base sit maxima, esse hanc apotomen 23— $\sqrt{17}$; si sphaeræ superficies uno, duobusve, vel tribus aut pluribus circulis, in quocunque & quacunque portiones secta sit, quancunque ex illis portionibus cum alia ac cum tota comparamus, ac uniuscujusque centrum gravitatis assignamus. Circa cylindricas & conicas superficies scalenas, tum etiam circa rectas, mira habemus. Inter illa perpende qualenam sit hoc problema: Portionem superficiei cylindri recti exhibemus, quæ superficiei datæ cylindri scaleni sit æqualis. Sed & istud: Dato quadrato, æqualem damus cylindricæ superficiei portionem, idque absolutè, nullâ suppositâ circuli quadraturâ, & exclusis cylindri basibus. Problemata atque theoremata innumera habemus soluta, cùm circa conicas sectiones, tum circa alia fere omnia Geometriæ huc usque notæ tam theoreticæ quàm practicæ capita. Circa Arithmetica, Musica, Optica, Astronomiam, Gnomonicam, & Geographiam,

*Plura quidem feci, quàm quæ comprehendere dictis
In promptu mihi sit;*

sed illa omnia vulgaria æstimo. Attamen, dic quibus in terris Luna minori spatio quàm 24 horarum nostrarum communium, bis oriatur, aut bis occidat ejusdem horizontis respectu. Facile quidem theorema, sed quod primâ fronte impossibile multis videatur. At Mechanicam à fundamentis ad fastigium novam extruximus, rejectis omnibus, præter paucos admodum, antiquis la-

pidibus quibus illa constabat; ita ut nunc octo contignationibus, hoc est totidem libris, absolvatur. Primus est de centro virtutis potentiarum in universum, an detur tale centrum, & quibus potentiis conveniat, quibus verò minimè; secundus de libra, ubi de æquiponderantibus; tertius de centro virtutis potentiarum in specie; quartus de fune mira continet; quintus de instrumentis & machinis; sextus de potentiis quæ in diversis mediis agunt; septimus de motibus compositis; octavus denique, de centro percussionis potentiarum mobilium. In his omnibus nulla admitto nova postulata, sed tantum ea quæ vulgò recepta sunt apud Authores: quòd sanè exequi, quàm non facile opus sit, testes sunt quotquot huc usque de gravibus super planis inclinatis existentibus egerunt; inter quos & ipse habetis, Vir Clarissime; qui propositione prima libri primi de motu gravium descendendum, ad id demonstrandum novo postulato usus es, quod quivis non facilè concesserit, quia pondera quæ proponis, non librâ rigidâ & rectâ, ut fieri solet, sed fune molli ac perfectè plicabili invicem alligantur. Nos autem ad hoc, librâ utimur modo usitato dispositâ, cujus beneficio propositionem illam non aliter demonstramus, quàm aut vectem aut axem in peritrochio: eam autem jam ante quindecim annos invenimus, atque anno 1636. tanquam Mechanicæ nostræ prodromum, prælo commisimus atque vulgavimus, sed Gallico idiomate. Neque etiam eum tantum casum consideravimus qui solus ab omnibus attenditur; cum scilicet potentia pondus in plano inclinato positum retinens, agit per lineam directionis ipsi plano parallelam; sed & dum eadem linea directionis aliam quamcunque positionem obtinuerit: quo pacto, ratio ponderis ad potentiam infinitè mutatur. Ibi autem quiddam demonstravimus quod multis omninò paradoxum visum est; nem-

pe, si intelligatur prælum aliquod duobus planis parallelis perfectè rigidis constans, quod ita disponatur ut ejus plana horizonti non sint parallela: tunc, quantâcunque potentiâ prematur prælum illud, planis semper perfectè planis ac parallelis inter se remanentibus, illa nullum pondus inter se retinebunt; sed illud pondus propriâ gravitate statim labetur inter ipsa plana, atque idem à prælo sese liberabit, nisi aliunde retineatur. Hæc quidem ad quintum nostrum librum pertinent. Libet autem ex quarto quoque hæc addere. Si tres potentiæ totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, (nodus est quodvis punctum in fune) æquilibrium constituent: tunc describi poterit triangulum cujus centrum gravitatis sit nodus ipse, tres autem anguli ad tria funium puncta alicubi terminentur (infinita quidem describerentur triangula, sed omnia similia) erunt autem tunc tres potentiæ in eâdem ratione cum tribus rectis à centro trianguli ad tres angulos terminatis; ita ut quælibet potentia homologa sit ei rectæ quæ in fune ipsius existit. Si quatuor potentiæ non existentes in eodem plano, totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, æquilibrium constituent: tunc quod supra de triangulo dictum est, de quadam pyramide tetragona verum erit. Hinc aliud paradoxum, funis horizonti minimè perpendicularis quantâ vi tendatur, si perfectè plicabilis, nullo modo autem rigidus ex se existat, imposito quocunque vel minimo pondere, aut si ipse ex se gravis esse intelligatur, flectetur necessariò, vel rumpetur, nec viribus ullis fieri poterit ut rectus evadat. Similiter, tres vel quocunque funes ad communem nodum religati, totidem potentiis in eodem plano existentibus; quod planum horizonti non sit perpendiculare, quibuscunque viribus tendantur; imposito quocunque vel minimo pondere, vel si ipsi funes per se graves esse intelligantur,

nunquam tamen poterunt eò adduci ut in eodem plano consistant. Tandem etiam, ex octavo libro illud habebis : Omnis sectoris circuli semicirculo non majoris circa centrum circuli circumvoluti, existente axe motus ad planum ejusdem circuli sive sectoris, perpendiculari, centrum percussionis sive impetus in recta angulum sectoris bifariam dividente quæsitus, sic reperietur : Ut chorda arcus sectoris ad ipsum arcum, ita tres quadrantes semidiametri circuli ad rectam inter ipsius circuli centrum, & centrum percussionis sectoris interceptam. Ex tali centro quod extra sectorem aliquando existet, si impetus sectoris eo modo moti quo dictum est, excipiat, productâ ad id rectâ angulum bifariam dividente, si centrum illud extra sectorem excurrerit, erit impetus ille maximus omnium qui ex quovis puncto in eadem recta existente excipi possunt.

De his & aliis agemus in posterum, si ita tibi placuerit, Vir Clarissime, postquam litibus valere jussis, solidam inierimus amicitiam, quam, ut spero, non recusabis. Illius autem leges, quod ad litterarum commercium attinet, tales sunt. Nihil tentandi gratiâ scribam. Quicquid scripsero, nisi de eo dubitare me, aut illud quærere scripsero, verum existimasse censear. Quoties per otium licuerit alicujus enuntiati demonstrationem mittere, mittam : nisi misero, si cupias, quàm citò mittere tenear. His legibus, si quid addere, aut detrachere ; immò, si ipsas prorsus tollere, & alias ferre voles, licet. Memineris tamen, quæstionibus agere tentandi gratiâ odiosum esse atque amico indignum ; neque enim omnia possumus omnes ; tum etiam amicum delectare oportet, non torquere. Hæc si observaverimus, tunc procul dubio, & durabit amicitia ; & dum uterque nostrum vicissim & reciprocè docebit & docebitur, uterque amborum scientiam, salvâ tamen inventoris laude, possidebit.

DE LA PRATIQUE

D E S

GRANDS CADRANS

PAR LE CALCUL.

DE

64 231

